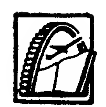
А. М. БАТКОВ, И. Б. ТАРХАНОВ



СИСТЕМЫ ТЕЛЕУПРАВЛЕНИЯ

• МАШИНОСТРОЕНИЕ • 1972 •



ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ

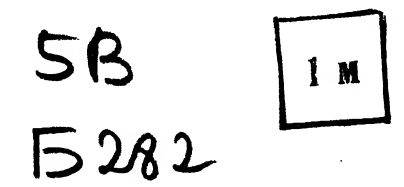
СПРАВОЧНАЯ БИБЛИОТЕКА
ИНЖЕНЕРА-КОНСТРУКТОРА

А. М. БАТКОВ, И. Б. ТАРХАНОВ

СИСТЕМЫ ТЕЛЕУПРАВЛЕНИЯ

Москва
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
1972

УДК 629.7.05.001.2(083)



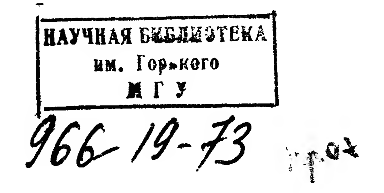
Системы телеуправления. А. М. Батков, И. Б. Тарханов М., «Машиностроение», 1971, стр. 192.

В книге изложены методы расчета известных систем телеуправления, которые могут применяться при проектировании контуров теленаведения движущихся объектов.

Основное внимание уделено применению современных методов теории автоматического управления к синтезу систем телеуправления при учете ограничений на управление. Оптимизация законов наведения проводится в классе стационарных, нестационарных, линейных и нелинейных систем автоматического управления. Приводятся примеры решения конкретных задач для гипотетических систем телеуправления.

Книга рассчитана на широкий круг инженеров и научных работников, занимающихся вопросами проектирования систем телеуправления.

Иллюстр. 43. Табл. 1. Библ. 21 назв.



2-4-3
430-70

ПРЕДИСЛОВИЕ

Системы телеуправления, т. е. управления на расстоянии, находят все более широкое применение в авиации, космонавтике, ракетной технике, транспорте и других областях техники.

В предлагаемой читателю книге системы телеуправления рассматриваются с позиций теории автоматического управления и ее развивающейся ветви — статистической динамики [17].

Основное внимание в работе уделяется задаче синтеза систем телеуправления, которая близка к задаче оптимальной фильтрации и отличается от нее лишь специфическими особенностями управляемого объекта. Рассматривая в качестве телеуправляемого объекта перемещающийся в пространстве аппарат (самолет, космический аппарат, ракета), авторы стремились учесть его основную особенность — ограниченность управляющих сил и запаса энергии. Именно это обстоятельство определяет основную трудность решения задачи синтеза и специфические особенности создания оптимальных систем телеуправления.

Не менее существенным при проектировании систем телеуправления является учет ограниченности информации о параметрах управляемого объекта. Ограничения информации определяются как невозможностью измерения некоторых фазовых координат объекта, так и незнанием ошибок измерений, являющихся случайными функциями. Это определяет статистический характер рассматриваемых задач формирования и оптимизации систем телеуправления.

В книге описаны функции элементов, образующих замкнутые системы телеуправления, с позиций теории

автоматического управления, определены математические модели элементов и характеристик ошибок измерительных средств. Затем рассмотрен вариационный метод оптимизации системы телеуправления с учетом случайных ошибок измерений и ограничений. Получены условия оптимальности управления в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина применительно к статистическим задачам. Этот метод применяется к задачам выбора оптимального управления линейных объектов при различных критериях и произвольной структуре закона управления. Изложены инженерные методы проектирования систем телеуправления, структура которых задана.

В конце книги освещены вопросы проектирования контуров телеуправления с учетом возможного противодействия.

Авторы надеются, что книга окажется полезной инженерам, решающим практические задачи проектирования систем телеуправления движущимися объектами, и заранее благодарят тех читателей, которые пришлют свои замечания и пожелания по адресу: Москва, 1-й Басманный пер., д. 3, Изд-во «Машиностроение».

Глава I

СИСТЕМА ТЕЛЕУПРАВЛЕНИЯ

1.1. ПОНЯТИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛЕУПРАВЛЕНИЯ

Системой телеуправления обычно называют систему, в которой объектом управляют на расстоянии.

Принцип телеуправления применяется, когда аппаратуру управления на самом объекте размещать нецелесообразно либо по условиям эксплуатации, либо из экономических соображений.

Для системы телеуправления характерно наличие пункта управления или командного пункта, расположенного на расстоянии от объекта управления. На пункте управления, как правило, располагается основная информационная и управляющая аппаратура, а также оператор (человек), управляющий объектом или принимающий решения об изменении режима управления. Таким образом, система телеуправления состоит из трех основных элементов:

— цель управления, которая может присутствовать в системе в виде соотношений, определяющих задачи, для выполнения которых предназначена система;

— объект управления, осуществляющий задачу, для выполнения которой создана система;

— пункт управления для сбора информации о цели и объекте управления и выработки команд управления объектом.

Неотъемлемой частью системы телеуправления являются линии связи между этими элементами и, в частности, линия передачи информации (команд) из пункта управления на объект [7].

По типу применяемых источников информации системы телеуправления можно разделить на следующие классы:

1. Собственно системы телеуправления, в которых источники информации о характеристиках (параметрах) цели и объекта управления расположены на пункте управления. Они, в свою очередь, подразделяются на системы [7]:

а) командного телеуправления, в которых характеристики цели и объекта управления измеряются независимыми источниками информации;

б) лучевого управления, в которых известны лишь относительные характеристики объекта и цели управления, измеряемые одним источником информации.

2. Комбинированные системы телеуправления, в которых источники информации о цели управления расположены как на объекте, так и на командном пункте.

В отличие от других типов систем в комбинированной системе телеуправления информация датчика, расположенного на объекте, не используется непосредственно для управления, а транслируется на командный пункт. Команды, посылаемые на объект, вычисляются в такой системе на основе информации от датчиков как на объекте, так и на командном пункте.

Поэтому системы этого класса часто называют системами с трансляцией [18].

3. Системы телекоррекции, в которых для управления непосредственно используется информация датчиков, расположенных на объекте, а информация датчиков на пункте используется лишь для контроля и изменения режимов работы системы, находящейся на объекте.

Системы телеуправления широко распространены в промышленности. Наиболее часто они используются для управления движущимися объектами. В этом случае на командный пункт возлагаются основные задачи по обработке информации и выработке команд, а управляющие средства, находящиеся на самом объекте, выбираются наиболее простыми из условий эксплуатации.

Примерами систем телеуправления этого вида могут служить системы управления ракетами [7]. Определяющей особенностью таких систем является одноразовое применение объекта (ракеты) и многоразовое использование пункта управления. Бортовая (автономная) система управления в этом случае может быть наиболее простой и дешевой, а пункт управления (командный пункт), находящийся на земле или на движущейся платформе (самолет, самоход) и выполняющий основные

функции по управлению, может быть достаточно сложным и дорогим.

Командный пункт системы телеуправления может состоять из радиолокаторов обнаружения цели, сопровождения цели и ракеты, вычислительных устройств, решающих задачи определения параметров траекторий движения цели и ракеты и вырабатывающих информацию для передачи на борт с помощью специальной линии связи [28]. В системе управления на командном пункте в данном случае имеется оператор, который выполняет наиболее сложные задачи управления в непредвиденных ситуациях (отказ в работе отдельных устройств системы телеуправления и т. п.).

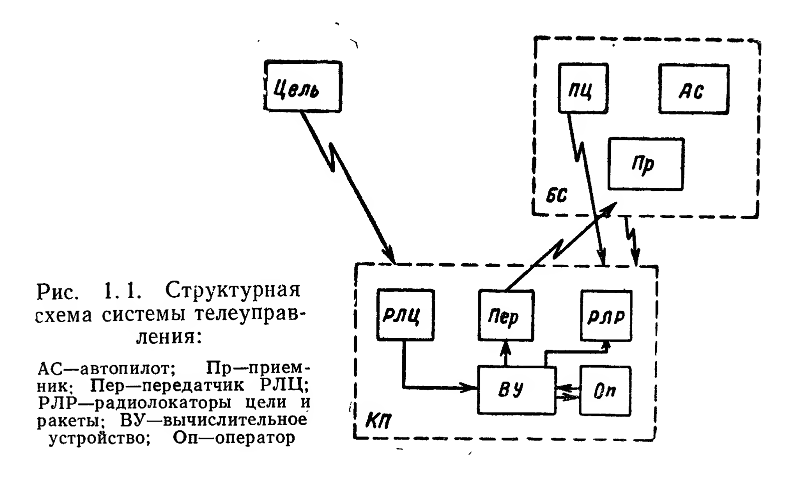


Рис. 1.1. Структурная схема системы телеуправления:

АС—автопилот; Пр—приемник; Пер—передатчик РЛЦ; РЛР—радиолокаторы цели и ракеты; ВУ—вычислительное устройство; Оп—оператор

В автономную (бортовую) систему управления ракетой должны входить приемное устройство информации командного пункта и автомат стабилизации (автопилот), управляющий ракетой на автономном, не управляемом с командного пункта, участке траектории полета, стабилизирующий корпус ракеты относительно системы координат, связанной с ее центром тяжести, и изменяющий положение центра тяжести ракеты в пространстве в соответствии с командами, посылаемыми с пункта управления.

В комбинированной системе телеуправления в состав бортовой аппаратуры может входить также пеленгатор

цели, передающий информацию о параметрах цели на командный пункт [7, 27].

Обобщенная структурная схема системы телеуправления ракетой представлена на рис. 1.1. Здесь в штриховые прямоугольники выделены: аппаратура на борту ракеты (БС — бортовая система) и аппаратура командного пункта (КП — командный пункт).

1.2. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ ТЕЛЕУПРАВЛЕНИЯ

Системы телеуправления решают разнообразные задачи. В связи с этим требования к ним могут быть сформулированы только в самом общем виде. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением класса систем телеуправления, решающих задачу наведения [21].

Для формулировки этой задачи рассмотрим движение в пространстве двух управляемых объектов, один из которых будем называть целью, а другой — наводящимся объектом. В процессе движения этих объектов некоторая скалярная функция D их относительных координат $x(t)$ (например, расстояние между ними) достигает своего наименьшего значения.

Момент времени, в который D принимает наименьшее значение $D_{\min}$, называется моментом встречи. Момент встречи $t_в$ и значение функции D в этот момент зависят от законов управления объектами, конкретных реализаций возмущений, действующих на объекты, начального состояния и т. д.

Управление наводящимся объектом для уменьшения величины D в момент встречи будем называть наведением объекта на цель, а систему, в которой осуществляется такое управление, — системой наведения.

Примем в качестве основной характеристики системы наведения точность, которая определяется значением $D(t)$ в момент встречи. При этом существенно, что момент встречи заранее неизвестен и определяется совокупностью условий, в которых осуществляется процесс наведения. Этим система наведения отличается от других типов систем управления.

Для характеристики во времени состояний системы наведения введем текущую меру точности $h(x, t)$, которая связывает значения относительных фазовых координат в текущий момент времени $t<t_в$ с характеристикой точности системы в момент встречи.

Обычно функция $h(x, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1 — в момент встречи, когда $t=t_в$, имеем

$$h(t_в)=D(t_в); \tag{1.1}$$

2 — при заданном законе изменения фазовых координат объектов на интервале времени $(t, t_в)$ текущая мера $h(x, t)$ является монотонной неубывающей нечетной функцией $D(t_в)$ для каждого значения t. Текущей мерой точности в системах наведения определяем пролет, как проекцию дальности между наводящимся объектом и целью на перпендикуляр к вектору их относительной скорости $V_{отн}$. Он определяет в текущий момент времени t значение наименьшей дальности между объектами, т. е. значение дальности в момент встречи при условии неизменности направления вектора относительной скорости в процессе наведения. В частности,

$$h(t)=D(t_в); \quad t<t_в, \tag{1.2}$$

если, начиная с данного момента t, оба объекта движутся равномерно и прямолинейно.

Поскольку текущая мера $h(x, t)$ удовлетворяет условию (1.1), ее значение в момент встречи может использоваться в качестве основной характеристики системы наведения.

Как следует из определения, текущая h и конечная D меры точности системы наведения, как и момент встречи $t_в$, являются функциями случайных начальных условий процесса наведения, возмущений в системе, поведения цели и ошибок получения информации. Поэтому точность системы наведения определяется статистическими характеристиками случайных условий и может быть вычислена в среднем по совокупности реализаций процесса наведения. В общем случае в качестве критерия точности системы наведения рассматриваем математическое ожидание функции пролета в момент встречи.

Например, для зенитной управляемой ракеты, предназначенной для поражения воздушных целей, основным показателем качества системы является вероятность поражения. Факт поражения цели определяется целым рядом случайных факторов. Одни из них связаны с особенностями цели, боевой части и т. д. Вторая группа факторов определяет взаимное положение ракеты и це-

ли в момент подрыва боевой части, т. е. в момент встречи.

Статистической характеристикой случайных величин, входящих в состав первой группы, является условный закон поражения [7]. Он определяет вероятность поражения цели при условии, что ракета занимает определенное положение относительно цели в момент подрыва. Наиболее существенно условный закон поражения зависит от дальности между ракетой и целью в момент подрыва и является монотонно убывающей функцией пролета в момент встречи.

Таким образом, приближенно будем считать, что вероятность поражения P определяется выражением

$$P=\int_{\Omega} P_{у}(h) P_{h}(h) dh, \tag{1.3}$$

где $P_{у}(h)$ — условный закон поражения; $P_h(h)$ — закон распределения пролета в момент встречи (подрыва боевой части); Ω — область возможных значений пролета.

Выражение (1.3) представляет собой математическое ожидание условного закона поражения по возможным значениям пролетов, т. е.

$$P=M\{P_{у}[h(t_{в})]\}, \tag{1.4}$$

где M — знак математического ожидания.

Поскольку $P_h(h)$ определяется системой наведения, то из выражения (1.4) следует, что при выбранной боевой части ракеты задача системы наведения состоит в уменьшении математического ожидания известной функции пролета в момент встречи.

Если система телеуправления предназначена для управления ракетой до момента подрыва боевой части, то изложенное целиком применимо к ней, и основной характеристикой системы телеуправления в этом случае можно считать математическое ожидание пролета в момент встречи.

Если же на конечном участке перед встречей с целью ракета переходит в режим самонаведения, то к системе телеуправления необходимо предъявить обычно дополнительные требования, состоящие в обеспечении условий захвата цели головкой самонаведения, расположенной на ракете [7, 24, 27]. К ним относится требование обеспечения определенного угла между продольной осью ра-

кеты или ее вектором скорости и направлением на цель, а также малой величины скорости изменения этого угла [27]. Вследствие действия случайных факторов эти требования могут быть выполнены только с определенной воройтностью [7, 24, 25].

В общем случае возможности системы телеуправления определяются информационными и энергетическими ограничениями, которые также являются основными ее характеристиками.

К информационным относятся ограничения, связанные с возможностями измерительных (чувствительных) элементов, расположенных на объекте и пункте управления. Они определяются количеством датчиков, порогом их чувствительности, диапазоном измерений и ошибками измерений, возникающими вследствие внутренних и внешних источников возмущений.

Ошибки в системе телеуправления могут возникать в датчиках информации, линиях связи и передачи команд [7]. В системах наведения располагаемая для управления наводящимся объектом информация в значительной степени определяется возможностями противника (цели) по созданию различных видов помех чувствительным элементам и линиям связи [22].

Информационные ограничения определяют статистический характер задач телеуправления. Поэтому анализ и расчет таких систем проводится методами статистической динамики систем автоматического управления.

Энергетические ограничения определяются характеристиками объекта управления. Они могут быть двух типов:

— жесткие ограничения, наложенные на текущие значения управлений и фазовых координат объектов, или на функции этих переменных;

— интегральные, или изопериметрические ограничения, которые определяют значения функционалов от координат или управлений в системе.

Типичным примером первого типа ограничения является условие на управляющее воздействие, в соответствии с которым управление должно принимать свои значения внутри и на границе области U:

$$u(t) \in U. \tag{1.5}$$

Подобное ограничение в системе наведения возникает вследствие ограничения ускорения объекта из условия

его прочности либо в результате нелинейности характеристик элементов системы типа линейной зоны с насыщением.

Интегральные ограничения определяют возможности системы в расходе энергии на управление. В системах управления движущимися объектами они возникают вследствие ограничения запаса топлива, необходимостью обеспечения заданной скорости движения, дальности и времени полета и т. д. Например, количество топлива T, расходуемого на управление, может быть учтено с помощью неравенства на функционал от уравления $u(t)$ вида

$$\int_{t_0}^{t_в} |u(t)|\,dt \leqslant T, \qquad (1.6)$$

где $(t_0, t_в)$ — интервал управления.

Ограничения обоих типов могут быть как детерминированными, т. е. выполняться для каждой реализации процесса управления, так и статистическими. В последнем случае они определяют значения переменных лишь в среднем для совокупности реализаций, т. е. налагаются на статистические характеристики законов распределения этих величин.

1.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ ТЕЛЕУПРАВЛЕНИЯ

Как указывалось в 1.1, система телеуправления, предназначенная для наведения объекта на цель, может содержать цель, объект наведения, устройства слежения за целью и объектом, вычислитель и линию передачи команд на объект управления. Рассмотрим более подробно эти элементы применительно к задаче управления наводящимся объектом при наведении его на пилотируемую воздушную цель.

Характеристики цели

Будем предполагать, что цель является материальной точкой, движущейся в неподвижной (земной) системе координат xyz со скоростью $V_ц$. Координаты цели $x_ц$, $y_ц$, $z_ц$, скорость $V_ц$ и ускорение $j_ц$ изменяются вследствие изменения управляющих воздействий, связанных с ними инерционным оператором. Проекции ускорения и скоро-

сти на оси земной системы координат будем обозначать $j_{цx}$; $j_{цy}$; $j_{цz}$ и $V_{цx}$; $V_{цy}$; $V_{цz}$, соответственно.

Уравнения движения цели могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{X}_ц &= V_ц; \\ \dot{V}_ц &= j_ц, \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

где $X_ц$ — вектор фазовых координат цели;

$V_ц$ — вектор скорости;

$j_ц$ — вектор ускорения.

Предполагаем, что фазовые координаты цели представляют собой полезный сигнал системы телеуправления, на основе измерения которого осуществляется процесс наведения. Возможность изменения ускорения (маневр цели) делает цель равноправным участником процесса наведения.

Существенно, что цель должна иметь интересы, противоположные интересам наводящейся ракеты. Если наводящаяся ракета стремится уменьшить ошибку наведения в момент встречи, то цель стремится ее увеличить. В этом смысле процесс наведения можно рассматривать как дифференциальную игру двух объектов с преследованием и уклонением [1].

Считаем, что цель противодействует наводящейся ракете как с помощью маневра, т. е. изменения вектора ускорения $j_ц$, так и с помощью воздействия на информационные каналы наводящейся ракеты (активные и пассивные помехи [22]).

Возможности противодействия цели могут быть ограничены имеющейся информацией о стратегиях наводящегося объекта, энергетическими характеристиками, а также тактической задачей, для решения которой предназначается цель.

С точки зрения системы наведения требования к цели могут быть сведены к ограничению запаса топлива или потерь скорости и дальности за счет ее маневрирования. Эти ограничения могут быть заданы с помощью неравенств вида

$$M\left[\int_{t_0}^{t_в} \mu(t)\, j_ц^2(t)\, dt\right] \leqslant c, \tag{1.8}$$

где $\mu(t)$ — весовой множитель, а c — постоянная.

Энергетические возможности цели дополнительно к неравенству (1.8) могут быть учтены ограничением текущего значения ускорения

$$|j_ц(t)| \leqslant j_{ц\,max}(t). \qquad (1.9)$$

В пределах ограничений (1.8) и (1.9) стратегия поведения цели определяется имеющейся в ее распоряжении информацией о процессе наведения и стратегиях наводящегося объекта.

Если цель не располагает информацией о входе в зону действия наводящегося объекта, она использует энергетику лишь для выполнения тактической задачи. В этом случае естественно предполагать, что неравенство (1.8) минимально, $j_ц(t)$ равно нулю и цель совершает прямолинейный полет, т. е.

$$x_ц(t) = x_0 + V_ц t. \qquad (1.10)$$

При наличии информации о системе управления и факте наведения ракеты цель стремится увеличить ошибки системы наведения путем изменения $j_ц(t)$ при выполнении условий (1.8) и (1.9).

Если при этом цель располагает только априорной информацией о системе наведения, ее поведение может быть априори задано статистическими характеристиками $j_ц(t)$. Примером поведения цели в этих условиях является, например, маневрирование с постоянной перегрузкой

$$x_ц(t) = x_0 + V_ц t + \frac{1}{2} j_ц (t - t_1)^2 \, 1(t - t_1), \qquad (1.11)$$

где t_1 — время начала маневра, $1(t - t_1)$ — единичная ступенчатая функция, либо изменение знака максимальной перегрузки в случайные независимые моменты времени. В последнем случае закон изменения $j_ц(t)$ может быть описан пуассоновским распределением. В частности, корреляционная функция такого процесса определяется выражением

$$R_j(\tau) = D_j e^{-\frac{|\tau|}{T_c}}, \qquad (1.12)$$

где D_j — дисперсия ускорения; $D_j = j^2_{ц\,max}$. $\qquad$ (1.13)

Здесь T_c — среднее значение периода изменения знака маневра. Когда цель располагает апостериорной информацией о процессе наведения, например, измеряет теку-

щие координаты наводящегося объекта, время до встречи и т. д., ее поведение будет определяться конкретными реализациями процессов в системе наведения. В этом случае решение игровой задачи не может быть получено заранее в виде детерминированной или случайной функции времени, а определено лишь в виде алгоритма связи управления $j_ц(t)$ с измеряемыми параметрами процесса наведения.

Выше отмечалось, что наряду с изменением полезного сигнала $j_ц(t)$ системы наведения цель располагает техническими возможностями воздействия на информационные каналы наводящегося объекта и пункта управления с помощью организованных помех. Эффект действия помех может привести к увеличению случайных или систематических ошибок получения информации, и в крайнем случае, к срыву процесса сопровождения цели и наведения.

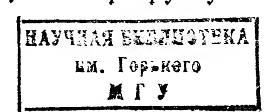
Применяемые помехи разнообразны [22]. Для борьбы с радиолокационными средствами могут быть применены, например, активные и пассивные помехи, ложные цели и защитные покрытия [7]. Возможности целей по применению помех ограничены располагаемыми источниками энергии (мощность помехи), весом аппаратуры создания помехи и степенью информированности цели о характеристиках измерительных устройств и линий связи.

Характеристики объекта управления

Применительно к задаче наведения в качестве объекта системы телеуправления рассмотрим ракету, например, управляемую аэродинамическими силами. Основные характеристики объекта в процессе телеуправления определяются степенью управляемости ракеты под действием команд.

Под управляемостью ракеты можно понимать располагаемые перегрузки, а также время их достижения при подаче команды, которое определяется инерционностью бортового контура. Считаем, что для достижения максимальной эффективности перегрузочные возможности объекта должны превосходить перегрузки цели [7].

Для любой заданной ракеты всегда существует критический угол атаки α_{max}, при котором ракета становится неустойчивой [14]. Величина критического угла атаки определяет располагаемую перегрузку на больших и



средних высотах полета. На малых высотах перегрузки ограничиваются прочностью ракеты. Будем считать, что в ракете отсутствует физический элемент, осуществляющий это ограничение. Вводим ограничение управляющей команды в виде нелинейности типа линейной зоны с насыщением, эквивалентное в статике ограничению перегрузки

$$|n(t)| \leqslant n_{max}, \tag{1.14}$$

где n_{max} — значение перегрузки объекта, определяемое из условия прочности.

Критический угол атаки вызывает необходимость ограничения максимального угла отклонения руля δ_{max}, которое осуществляется механическим упором. Обычно δ_{max} определяется из балансировочного соотношения

$$m_z^{\delta}\delta_{max} = -m_z^{\alpha}\alpha_{max}, \tag{1.15}$$

где m_z^{α} — коэффициент аэродинамического момента, характеризующий статическую устойчивость; m_z^{δ} — коэффициент аэродинамического момента, характеризующий действия рулей. Это условие выполняется только в статическом режиме, т. е. при постоянном угле отклонения руля.

Следует отметить, что при управлении объектом на разгонном участке при малой скорости могут возникнуть закритические углы атаки при $|n(t)| \leqslant n_{max}$. В этом случае в закон ограничения n_{max} необходимо вводить программную функцию, соответствующую номинальной скоростной характеристике объекта [14].

Для улучшения характеристик устойчивости и управляемости ракеты используются автопилоты [5]. Ракета вместе с автопилотом образует контур стабилизации или автономный контур в системе телеуправления. Повышение требований к быстродействию объектов управления приводит к ухудшению их характеристик устойчивости. Основная задача автономного контура состоит наряду с устойчивостью в обеспечении стабильности характеристик объекта управления в диапазоне условий его применения при условии достаточной точности отработки команд, передаваемых с пункта управления и обеспечения заданной траектории на автономном (неуправляемом) участке наведения.

Для ракет с аэродинамическими органами управления ускорение j_p наряду с траекторией наведения существенно влияет на ее баллистические характеристики, приводя к появлению индуктивной составляющей силы лобового сопротивления Q [5]

$$Q = C_x q S, \tag{1.17}$$

где C_x — коэффициент лобового сопротивления ракеты;
S — площадь ее крыла.

Для большинства аэродинамических схем приближенно можно считать, что

$$C_x = C_{x_0} + AC_y^2, \tag{1.18}$$

где C_y^2 определяет индуктивную составляющую коэффициента лобового сопротивления, возникающую за счет угла атаки или перегрузки;
C_{x_0} — коэффициент лобового сопротивления при $\alpha=0$;
A — конструктивная постоянная ракеты.

Воспользовавшись уравнением, описывающим изменение модуля вектора скорости ракеты V_p в плоском движении [14]:

$$\frac{dV_p}{dt} = \frac{P}{m}\cos\alpha - g\sin\theta - \frac{Q}{m}, \tag{1.19}$$

где θ — угол тангажа вектора скорости;
g — ускорение силы тяжести,
и приближенной зависимостью

$$C_y = C_y^\alpha \alpha, \tag{1.20}$$

получим

$$\frac{dV_p}{dt} = \frac{P}{m}\cos\alpha - g\sin\theta - C_{x_0}\frac{qS}{m} - \frac{Am}{qS}j_p^2. \tag{1.21}$$

При получении выражения (1.21) предполагалось, что

$$C_y^\alpha qS \gg P. \tag{1.22}$$

Из выражения (1.21) следует, что уменьшение скорости ракеты пропорционально интегралу от суммы: 1) ве-

совой составляющей $g \sin \theta$, которая обычно мала; 2) составляющей $C_{x_0}\frac{qS}{m}$, определяемой в основном заданной траекторией движения ракеты; 3) составляющей, зависящей от квадрата поперечной перегрузки $\frac{Am}{qS}j_p^2$.

Выражение

$$\Delta V_{\text{р}}(t)=\int_{t_0}^{t}\left(C_{x_0}\frac{qS}{m}+\frac{Am}{qS}j_{\text{р}}^2\right)dt \qquad (1.23)$$

позволяет получить количественные характеристики уменьшения скорости объекта как за счет траектории движения, так и управления при ее реализации, и является одним из существенных ограничений в системах телеуправления.

Реализация минимального значения выражения (1.23) обеспечивает максимальную конечную скорость ракеты $V_{\text{р}}$, что существенно с точки зрения ее перегрузочных возможностей, и может найти применение в системах телеуправления, дальняя граница зоны действия которых ограничена характеристиками технических средств. При ограничении дальней границы зоны поражения баллистическими характеристиками объекта целесообразно минимизировать выражение

$$\Delta D_{\text{р}}(t_{\text{к}})=\int_{t_0}^{t_{\text{к}}}\int_{t_0}^{t}\left(C_{x_0}\frac{qS}{m}+\frac{A_m}{qS}j_{\text{р}}^2\right)d\tau dt, \qquad (1.24)$$

что эквивалентно максимизации средней скорости полета объекта.

Характеристики информационных элементов системы телеуправления

Информационные элементы системы телеуправления, предназначенной для решения задачи наведения, представляют собой приборы для измерения координат цели и ракеты. Такими приборами могут быть радиотехнические средства. Параметры траекторий объектов измеряют радиовизирами в некоторой системе координат, которую назовем измерительной. Она может быть совмещена с земной системой координат при неподвижной

радиолокационной станции, либо с гиростабилизированной системой [18].

Для радиотехнических методов измерения координат возможно непосредственное измерение угла места ε, азимута β и дальности до объекта r. Эти методы позволяют определить траекторию движения объекта в сферической системе координат. При этом координаты в де-

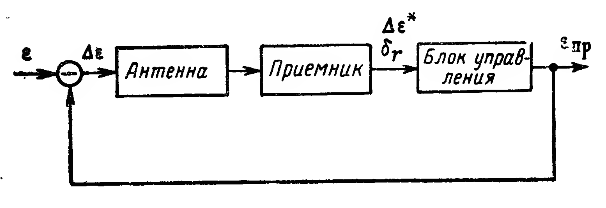


Рис. 1.2. Схема радиолокатора

картовой системе координат x, y, z могут быть определены с помощью обычных формул перехода:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varepsilon\sin\beta; \\ y &= r\sin\varepsilon; \\ z &= r\cos\varepsilon\cos\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (1.25)$$

Полагаем, что в состав измерительного комплекса входят две системы визирования: угломерная и дальномерная. Угломерная система обычно строится на принципе сопровождения объекта, при котором происходит совмещение оси равносигнальной зоны антенны с направлением на объект. Радиовизир представляет собой замкнутую следящую систему, состоящую из антенны, приемника и блока управления (рис. 1.2).

С выхода радиоприемного устройства на вход блока управления поступает сигнал отклонения оси равносигнальной зоны от направления на визируемый объект и вырабатывается сигнал на изменение положения диаграммы направленности антенны. Текущее значение угла оси равносигнальной зоны антенны является в такой схеме приборным значением истинного угла направления на объект.

Основными источниками ошибок угломерных систем являются [7] внутренний шум радиоприемного устройст-

ва, амплитудные, угловые и поляризационные флюктуации сигнала, отраженного от цели, отражения от земли и помехи, создаваемые целью [22]. В системах визирования наводящегося объекта флюктуации отраженного сигнала могут быть исключены с помощью приемопередатчика («ответчика»), установленного на объекте.

При отсутствии организованных помех антенно-приемное устройство осуществляет линейное безынерционное преобразование входного сигнала. В этом случае сигнал на выходе приемника $\Delta\varepsilon^*$ может быть представлен в виде [7] (см. рис. 1.2)

$$\Delta\varepsilon^* = [k_{\text{пр}} + \varkappa(t)]\,\Delta\varepsilon + n(t), \tag{1.26}$$

где $k_{\text{пр}} + \varkappa(t)$ — коэффициент усиления приемного тракта, состоящий из регулярной $k_{\text{пр}}$ и случайной $\varkappa(t)$ составляющих;

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_{\text{пр}} \tag{1.27}$$

представляет собой отклонение оси равносигнальной зоны от истинного направления ε; $n(t)$ — аддитивная составляющая ошибок сопровождения, статистически независимая от $\varkappa(t)$ и $\varepsilon(t)$. При малых ошибках сопровождения $\varkappa(t)$, вызываемая амплитудными флюктуациями отраженного сигнала, мало, а $n(t)$ может приниматься в виде нормального белого шума с уровнем спектральной плотности N^2, зависящим от отражающей поверхности цели и дальности до объекта сопровождения, т. е.

$$R_n(t_1,\ t_2) = N^2\delta(t_1 - t_2). \tag{1.28}$$

Здесь $R_n(t_1, t_2)$ — корреляционная функция, а

$$\left.\begin{aligned} N^2 &= \frac{\lambda}{P_c/P_{\text{ш}}} \quad \text{при} \quad P_c/P_{\text{ш}} < P_1; \\ N^2 &= \text{const} \quad \text{при} \quad P_c/P_{\text{ш}} > P_1 \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

$$P_c/P_{\text{ш}} = \frac{k\sigma_{\text{эфф}}}{r^4}, \tag{1.30}$$

где $\sigma_{\text{эфф}}$ — отражающая поверхность объекта;

r — дальность от объекта до пункта наведения;

$P_c/P_ш$ — отношение «сигнал—шум»;

λ, k — константы, определяемые характеристиками радиолокационных средств.

Инерционность системы визирования определяется блоком управления антенной, или диаграммой направленности, который в системах с механическим перемещением антенны включает силовые приводы. Он может быть при малых ошибках сопровождения описан линейным стационарным звеном с известной передаточной функцией.

При действии значительных помех ошибки визирования уже нельзя считать малыми и антенно-приемное устройство перестает быть линейным. В этом случае вместо выражения (1.26) сигнал на выходе приемника можно представить в виде

$$\Delta\varepsilon^* = f(\Delta\varepsilon) + n(t, \Delta\varepsilon), \qquad (1.31)$$

где $f(\Delta\varepsilon)$ — математическое ожидание выходного сигнала, нелинейно зависящее от $\Delta\varepsilon$; $n(t, \Delta\varepsilon)$ — помеха, также нелинейно зависящая от $\Delta\varepsilon$.

Вид функции $f(\Delta\varepsilon)$ существенным образом зависит от применяемого типа помехи и устройства визирования. В частности, при действии помех может значительно измениться коэффициент усиления приемного тракта и составляющей $\varkappa(t)$ в выражении (1.26) уже нельзя пренебрегать. Если действие помехи приводит к нарушению нормальной работы приемника, то его коэффициент усиления может уменьшаться до нуля. При действии импульсных помех коэффициент усиления может изменяться скачком, и функция $f(\Delta\varepsilon)$ становится характеристикой импульсного элемента (ключа), период замыкания которого зависит от характера помехи [7].

Ошибки $n(t, \Delta\varepsilon)$ при действии шумовых помех могут оставаться белым шумом, уровень спектральной плотности которого N^2 зависит от $\Delta\varepsilon$ и вида помехи. При действии низкочастотных помех $n(t, \Delta\varepsilon)$ становится узкополосным шумом, распределение которого отличается от нормального, а спектр сосредоточен в области частот системы управления.

Вследствие увеличения ошибок сопровождения блок управления также может работать в нелинейном режиме, и при его описании придется учитывать ограничения мощности и скорости приводов.

Работа дальномерной системы радиовизира может быть описана аналогично. При малом уровне флюктуаций можно считать, что выходной сигнал системы $r_{пр}$ содержит аддитивные ошибки Δr с широкополосным спектром:

$$r_{пр}=r+\Delta r. \qquad (1.32)$$

Считая, что работа радиодальномера основана на измерении временной задержки ответного импульса по отношению к зондирующему, на его работу может существенно влиять ответная импульсная помеха, которая создается путем переизлучения станцией помех зондирующего импульса с переменной временной задержкой (уводящая по дальности помеха) [7]. Возможность помехи этого типа делает дальномерный канал менее помехоустойчивым, чем угломерный.

Таким образом, в нормальных условиях работы можно считать, что информационные элементы системы наведения осуществляют линейное, в первом приближении безынерционное преобразование входных сигналов. Если обозначить характеристики объектов вектором $\boldsymbol{x}$, то вектор измерений $\boldsymbol{z}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}, \qquad (1.33)$$

где $\boldsymbol{C}$ — матрица, зависящая от времени в общем случае; $\boldsymbol{n}(t)$ — белый стационарный шум с уровнем спектральной плотности N^2.

При действии организованных помех зависимость (1.33) становится нелинейной и имеет вид

$$\boldsymbol{z}=F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{n},\ t) \qquad (1.34)$$

или, в частности,

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\ t)+\boldsymbol{n}(t,\ \boldsymbol{x}). \qquad (1.35)$$

Существенно при этом наличие мультипликативной составляющей помехи, характерным признаком которой является случайность матрицы $\boldsymbol{C}$.

Характеристики линии передачи команд управления

Линии передачи команд управления в телеуправляемой системе могут быть многоканальными. Например, в системе наведения на ракету могут передаваться «плавные» команды управления по курсу, танга-

жу и крену, а также различные команды изменения параметров контура стабилизации, изменения режимов управления и т. д.

Для обеспечения передачи различных команд может быть использован принцип частотного, временного или кодового разделения сигналов [18]. При этом для упрощения системы приема на борту команды могут иметь постоянную амплитуду, а содержащаяся в них информация преобразуется либо в длительность импульса при широтно-импульсной модуляции, либо квантуется по уровню (кодово-импульсная модуляция) и передается

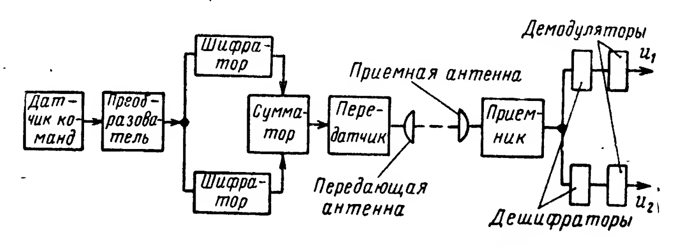


Рис. 1.3. Схема командной линии

в виде разрядов чисел. Для воспроизведения команд в этих случаях используется система релейных (пороговых) элементов.

Структурная схема двухканальной командной линии представлена на рис. 1.3 [18]. Согласно этой схеме полученные в счетно-решающем приборе команды в виде физических величин преобразуются в форму, удобную для передачи (временные интервалы, разряды и т. д.). Затем команда шифруется и модулируется для разделения каналов и увеличения помехоустойчивости. Полученные бортовым приемником команды дешифрируются, т. е. пропускаются команды, имеющие определенные признаки (в частности, определенную последовательность импульсов или групп импульсов), и превращаются в демодуляторах в напряжения постоянного тока, поступающие на исполнительные органы объекта управления.

В составе линии передачи команд можно выделить безынерционную по отношению к команде часть, включающую элементы преобразования, шифрации и дешифрации, передачи и приема, и инерционную часть, определяемую фильтрами низких частот в демодуляторах. Более того, по отношению к информации, содержа-

щейся в командах, частотные характеристики фильтров низких частот достаточно широкополосны и не искажают ее. Поэтому их также можно рассматривать как безынерционные [7]. Таким образом, в нормальных условиях линия передачи команд может характеризоваться коэффициентом усиления $k_к$.

Одной из причин ошибок линии передачи команд являются действия помех, внутренних шумов приемо-передающей аппаратуры и сбоев. С учетом ошибок команду на выходе линии передачи $u_к$ можно представить в виде

$$u_к=(k_к+\Delta k)u+\Delta u_ш, \quad (1.36)$$

где u — истинная команда; Δk — случайные изменения коэффициента усиления линии, не коррелированные с командой; $\Delta u_ш$ — аддитивная шумовая составляющая помехи.

Обычно [7] составляющая $\Delta u_ш$ является широкополосным случайным процессом и может быть аппроксимирована белым шумом. Случайная составляющая коэффициента усиления возникает в результате ложных срабатываний релейных (пороговых) элементов в приемной части линии и приводит к уменьшению коэффициента усиления ($\Delta k<0$) линии в целом. Количественные характеристики ошибок зависят от типа командной линии и определяются соотношением сигнал/шум на входе приемника команд [7].

1.4. КОНТУР ТЕЛЕУПРАВЛЕНИЯ

Для обеспечения необходимой точности процесса управления система телеуправления может строиться в виде системы автоматического управления с обратной связью. Цепь обратной связи образуется элементами системы, сопровождающими ракету и измеряющими текущие параметры ее траектории, сравнивающими задаваемое законом движения цели положение ракеты с действительным и вырабатывающими на основе получаемой информации команды управления.

Совокупность указанных элементов и связи между ними, образующие замкнутую систему, составляют контур управления. Это понятие оказалось полезным при применении методов теории автоматического управления к анализу и формулированию требований к элементам системы. Оно позволяет с единой точки зрения преобразования информации рассмотреть совокуп-

ность физически разнородных элементов, образующих систему телеуправления, и дать единую математическую базу их описания.

Структурная схема контура телеуправления в обобщенном виде приведена на рис. 1.4. Она включает: движение цели, определяемое ее ускорением $j_ц(t)$; контур стабилизации ракеты с выходом в виде ускорения $j_р(t)$; корректирующее устройство или счетно-решающий при-

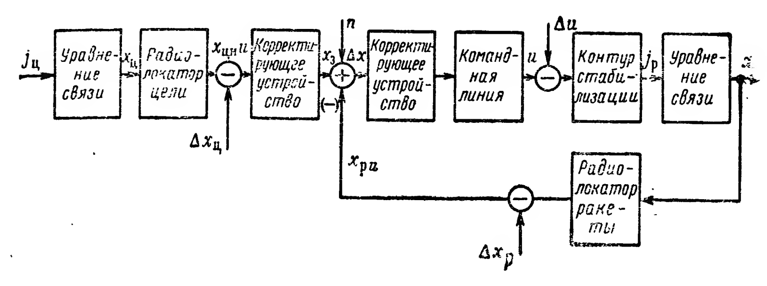


Рис. 1.4. Структурная схема контура телеуправления

бор (СРП), вырабатывающий команды $u(t)$, измерительные элементы параметров цели $x_ц$ и ракеты $x_р$ с ошибками $\Delta x_ц$ и $\Delta x_р$, а также линию передачи команд с ошибками Δu. Существенными элементами контура являются уравнения связи, под которыми понимают соотношения между ускорениями и измеряемыми параметрами траекторий движения цели и ракеты.

В состав контура управления входит также элемент формирования заданного закона изменения параметров траектории ракеты. Выход этого элемента $x_з$ является управляющим воздействием в контуре управления. Соотношения, связывающие $x_з(t)$ с $x_ц(t)$ и $x_р(t)$, называют законом наведения. Зависимость законов наведения от $x_р$ обычно довольно слабая или совсем отсутствует. В точке встречи координаты заданной траектории ракеты совпадают с координатами цели. Элементы, вычисляющие $x_з(t)$, входят в состав счетно-решающего прибора.

На схеме рис. 1.4 предполагается, что в состав системы телеуправления входят два независимых источника информации, измеряющие отдельно параметры траектории цели и наводящегося объекта. Если в системе имеется одно устройство, измеряющее относительные (разностные) параметры траекторий объектов, то схема упрощается и принимает вид, представленный на рис. 1.5.

В этом случае уравнение связи определяется соотношением, связывающим измеряемый параметр x, который характеризует относительное положение цели и наводящегося объекта с их ускорениями. Схема на рис. 1.4 характерна для систем командного наведения, схема на рис. 1.5 — для систем управления по лучу.

Существенное отличие контура, представленного на рис. 1.4, от контура на рис. 1.5 — возможность использования двух корректирующих устройств в цепи управля-

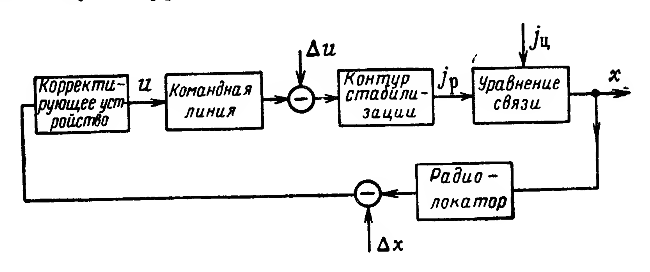


Рис. 1.5. Структурная схема контура телеуправления при измерении относительных координат

ющего воздействия и в цепи с обратной связью. Это является следствием применения двух независимых источников информации и обусловливает бо́льшие возможности системы телеуправления.

Слежение за ракетами может осуществляться дискретно с фиксированными или случайными периодами выдачи. В этом случае контур телеуправления содержит в цепях радиолокаторов и командной линии импульсные элементы типа «ключа». Эти ключи могут работать синхронно либо независимо друг от друга.

Частично элементы, входящие в контур телеуправления, были рассмотрены в предыдущем параграфе. Согласно приведенным описаниям радиолокаторы цели и ракеты могут быть представлены стационарными системами с заданными передаточными функциями и линейно преобразовывать сигналы при отсутствии организованных помех. Ошибки измерения углов и дальностей при расчетах принимаются «белыми» шумами.

Считаем, что линия передачи команд соответствует безынерционному линейному преобразованию команды с коэффициентом усиления, постоянным при отсутствии помех и уменьшающимся при их действии. Аддитивные

ошибки командной линии являются широкополосными шумами.

При использовании в контуре телеуправления двух радиолокаторов могут возникнуть дополнительные ошибки их согласования. Они связаны с использованием различных баз (линий) отсчета и ошибок пересчета величин, измеряемых одним радиолокатором, к базе другого радиолокатора. Ошибки подобного типа назовем инструментальными. Существенная особенность инструментальных ошибок состоит в том, что их спектр должен быть сосредоточен в низкочастотной области. Поэтому их исключение с помощью фильтрации затруднено и они непосредственно влияют на точность наведения.

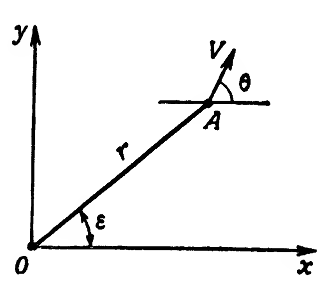


Рис. 1.6. Параметры, определяющие положение объекта относительно пункта наведения

Существенными элементами контура управления движущимися объектами являются уравнения связей и законы наведения. Как указывалось выше, под уравнением связи понимаем математические зависимости, связывающие ускорения объектов с измеряемыми параметрами и пролетом, характеризующим точность системы наведения. Рассмотрим эти уравнения.

Уравнение связи между ускорением ракеты и ее сферическими координатами

Пусть радиолокатор, находящийся на пункте управления, измеряет угол места ε, азимут β и дальность r до объекта, движущегося со скоростью V и ускорением j.

Рассмотрим случай плоского движения, представленный на рис. 1.6.

Пункт наведения на рис. 1.6 расположен в начале координат xoy (точка o), а объект в точке A на плоскости xoy. Рассматривая проекции скорости на направление вектора r и перпендикуляр к нему, получим:

$$\frac{dr}{dt} = V\cos(\theta - \varepsilon); \qquad (1.37)$$

$$r\frac{d\varepsilon}{dt} = V\sin(\theta - \varepsilon), \qquad (1.38)$$

где ε — угол места объекта и θ — угол тангажа вектора скорости, отсчитываемые от прямой ox.

Продифференцировав уравнение (1.38) по t и использовав уравнение (1.37), получим

$$r\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\varepsilon}{dt}=\dot{V}\sin(\theta-\varepsilon)+V\dot{\theta}\cos(\theta-\varepsilon). \quad (1.39)$$

Боковое ускорение объекта j может быть определено выражением

$$j=V\dot{\theta}. \quad (1.40)$$

Отсюда

$$r\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varepsilon}{dt}=j_т. \quad (1.41)$$

Здесь

$$j_т=\dot{V}\sin(\theta-\varepsilon)+j\cos(\theta-\varepsilon) \quad (1.42)$$

— проекция полного ускорения объекта на перпендикуляр к линии дальности, которое складывается из ускорения за счет изменения величины вектора скорости и его направления.

Особенность уравнений связи (1.38) и (1.41) состоит в нелинейности левой части уравнения (1.41) относительно r и ε и правых частей уравнений относительно ε и θ.

Уравнение (1.41) линеаризуем, предполагая, что r меняется по заданному закону. В этом случае уравнение (1.37) можно исключить, а в уравнении (1.41) рассматривать r как известную функцию времени.

Если при этом рассматривать $j_т$ как внешнее воздействие, то уравнение связи ускорения с углом места объекта становится линейным дифференциальным уравнением второго порядка относительно ε с переменными коэффициентами.

Уравнение (1.41) используем при замороженных значениях дальности r и скорости объекта V, предполагая при этом, что $\frac{dr}{dt}=V$; тогда, применяя преобразование Лапласа, найдем

$$\frac{\varepsilon(s)}{j_т(s)}=\frac{1}{2Vs\left(\frac{r}{2V}s+1\right)},$$

или, учитывая уравнение (1.38), получим

$$\frac{\varepsilon(s)}{j(s)}=\frac{\cos(\theta-\varepsilon)}{\left(2V-\frac{r\dot{V}}{V}\right)s\left[\frac{r}{\left(2V-\frac{r\dot{V}}{V}\right)}s+1\right]}.$$

Заметим, что при перемещении командного пункта со скоростью V_0, направленной под углом θ_0 к линии отсчета ox, по аналогии с ранее полученным найдем

$$\frac{dr}{dt}=V\cos(\theta-\varepsilon)-V_0\cos(\theta_0-\varepsilon); \tag{1.43}$$

$$r\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\varepsilon}{dt}=j_{\Sigma\text{т}}, \tag{1.44}$$

где проекция суммарного ускорения j_Σ на перпендикуляр к r состоит из ускорений движения командного пункта j_0 и объекта сопровождения j:

$$j_{\Sigma\text{т}}=\dot{V}\sin(\theta-\varepsilon)-\dot{V}_0\sin(\theta_0-\varepsilon)+j\cos(\theta-\varepsilon)-$$
$$-j_0\cos(\theta_0-\varepsilon). \tag{1.45}$$

Уравнение связи между ускорением ракеты и линейной координатой

Обратимся к структурной схеме контура наведения. Выходным параметром системы является измеряемая координата ракеты, это угол места (азимут). Этот угол сравнивается с заданным значением угла, а их разность используется для формирования управляющей команды. Повидимому, возможны системы телеуправления, в которых разностная координата для вычисления команды умножается на дальность до ракеты. Такое формирование законов наведения позволяет достаточно просто менять величины упреждения методов в зависимости от условий наведения. В этом случае в качестве выходного сигнала системы удобно рассматривать линейную координату h (рис. 1.7). Определим кинематическую связь между ускорением объекта и величиной

$$h=r\varepsilon. \tag{1.46}$$

Дифференцируя выражение (1.46) дважды по времени, получим

$$\frac{d^2h}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}\varepsilon+r\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\varepsilon}{dt}. \qquad (1.47)$$

Из сравнения уравнения (1.47) с уравнением (1.44) следует

$$\frac{d^2h}{dt^2}=j_{\Sigma т}+\frac{d^2r}{dt^2}\varepsilon. \qquad (1.48)$$

Уравнение (1.48) выражает связь между ускорением ракеты и второй производной линейного отклонения.

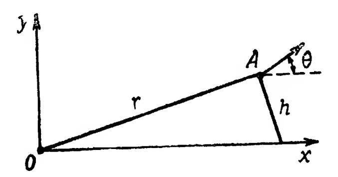


Рис. 1.7. Связь линейной координаты h с координатами объекта

На участках телеуправления в задачах наведения вторую производную по дальности считаем малой и вторым слагаемым в правой части уравнения (1.48) можно пренебречь.

Таким образом, получаем

$$\frac{d^2h}{dt^2}=j_{\Sigma т}, \qquad (1.49)$$

где $j_{\Sigma т}$ определяется выражением (1.45) для движущегося пункта управления и выражением (1.42) для неподвижного пункта.

Особенность уравнения (1.49) по сравнению с уравнением (1.44) — его стационарность. Во многих задачах это свойство позволяет существенно упростить задачу расчета контура телеуправления.

Уравнения связи ускорения ракеты и цели с их относительными координатами

Рассмотрим плоское движение ракеты с ускорением $j_р$ и скоростью $V_р$ и цели, скорость которой $V_ц$, а ускорение $j_ц$. Пусть объекты находятся на расстоянии D друг от друга.

Обозначим через $q\ (t)$ текущий угол места (или азимут) вектора дальности (рис. 1.8) относительно некото-

рой неподвижной системы координат, а через $\theta_р$ и $\theta_ц$ углы векторов скорости $V_р$ и $V_ц$ относительно линии отсчета. Рассматриваемый случай аналогичен визированию объекта с подвижного пункта управления. Поэтому урав-

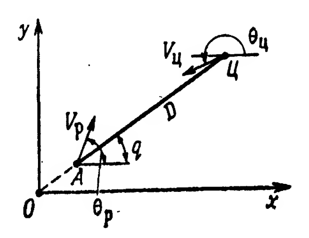


Рис. 1.8. Кинематика относительного положения цели и наводящегося объекта

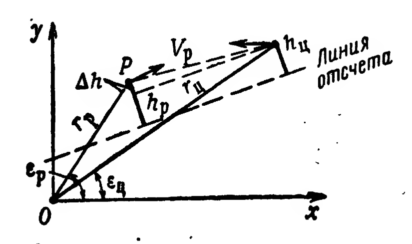


Рис. 1.9. Определение линейных отклонений $h_р$ и $h_ц$

нение связи $q(t)$ с $j_р$ и $j_ц$ аналогично уравнениям (1.44) и (1.45) и имеет вид

$$D\ddot{q}(t)+2\dot{D}\dot{q}(t)=j_{\Sigma т}, \tag{1.50}$$

где

$$j_{\Sigma т}=\dot{V}_р\sin(\theta_р-q)-\dot{V}_ц\sin(\theta_ц-q)+ \\ +j_р\cos(\theta_р-q)-j_ц\cos(\theta_ц-q). \tag{1.51}$$

Если в качестве параметра, характеризующего относительное положение объектов, используется линейное рассогласование (рис. 1.9), представляемос в виде

$$\Delta h=h_{зад}-h_р, \tag{1.52}$$

то можно записать

$$\Delta\ddot{h}=\ddot{h}_{зад}-\ddot{h}_р, \tag{1.53}$$

где обозначено

$$h_{зад}=r_ц\varepsilon_ц+f(r_ц,\ r_р); \tag{1.54}$$

$$h_р=r_р\varepsilon_р, \tag{1.55}$$

$r_р$ и $r_ц$ — дальности до ракеты и цели от пункта наведения;

$\varepsilon_р$ и $\varepsilon_ц$ — их углы места.

Используя уравнение (1.48), получим

$$\Delta \ddot{h} = j_{\Sigma т} + \ddot{r}_р \varepsilon_р + \ddot{r}_ц \varepsilon_ц + \ddot{f}(r_ц,\ r_р). \qquad (1.56)$$

При малых значениях вторых производных $\ddot{r}_р$, $\ddot{r}_ц$ и $\ddot{f}(r_р,\ r_ц)$ имеем $\Delta \ddot{h} = j_{\Sigma т}$. (1.57)

Этот случай по своему характеру близок к методу параллельного сближения [7]. Полученное уравнение определяет связь линейного отклонения, измеряемого от фиксированной в пространстве линии отсчета, с суммарным ускорением объектов $j_{\Sigma т}$, которое на основании выражения (1.45) равно

$$j_{\Sigma т} = \dot{V}_ц \sin(\theta_ц - \varepsilon_0) + j_ц \cos(\theta_ц - \varepsilon_0) -$$

$$- \dot{V}_р \sin(\theta_р - \varepsilon_0) - j_р \cos(\theta_р - \varepsilon_0). \qquad (1.58)$$

Иногда в качестве характеристики относительного положения цели и ракеты используют линейные отклонения вида

$$\Delta h_r = r_р(\varepsilon_ц - \varepsilon_р) \qquad (1.59)$$

или

$$\Delta h_D = Dq. \qquad (1.60)$$

Величина Δh_r характеризует длину дуги, соединяющей ракету с точкой на радиусе-векторе цели $r_ц$ на расстоянии $r_р$ от пункта управления.

Дифференцируя выражение (1.59) два раза и используя уравнения (1.48), (1.38) и (1.41), в которые введены индексы, обозначающие цель и ракету, получим

$$\Delta \ddot{h}_r = \frac{r_р}{r_ц} j_{\Sigma ц} - j_{\Sigma р} + 2\left(\dot{r}_р - \dot{r}_ц \frac{r_р}{r_ц}\right) \frac{V_ц \sin(\theta_ц - \varepsilon_ц)}{r_ц} \qquad (1.61)$$

при условии малости $\ddot{r}_р$. При заданном законе изменения дальностей это уравнение стационарно по отношению к ускорению ракеты и включает переменные параметры по отношению к ускорению цели.

Аналогично вторую производную Δh_D в выражении (1.60) можно представить, учитывая уравнение (1.50), в виде

$$\Delta \ddot{h}_D = \ddot{D} q + j_{\Sigma т}, \qquad (1.62)$$

где $j_{\Sigma т}$ определяется выражением (1.51).

При малости $\ddot{D}$ это уравнение стационарно и линейно относительно проекции перегрузки на перпендикуляр к линии дальности

$$\Delta\ddot{h}_D = j_{\Sigma т}. \qquad (1.63)$$

Уравнения связи пролета с ускорениями цели и ракеты

Согласно определению пролета R он является кратчайшим расстоянием между целью и ракетой при условии их прямолинейного относительного движения. При известных векторах скорости $\boldsymbol{V}_р$ и $V_ц$, лежащих в одной плоскости, пролет может быть легко определен как проекция дальности на перпендикуляр к вектору относительной скорости $\boldsymbol{V}_{отн}$ (рис. 1.10):

$$V_{отн} = V_ц - V_р. \qquad (1.64)$$

Можно показать, что в плоском движении

$$R = \frac{D^2(t)\,\dot{q}(t)}{V_{отн}}. \qquad (1.65)$$

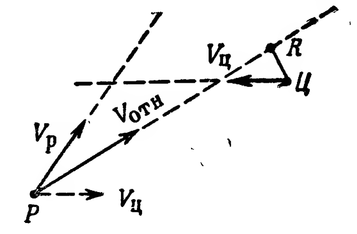


Рис. 1.10. Понятие пролета

При постоянной относительной скорости $V_{отн}$, дифференцируя выражение (1.65) и учитывая уравнение (1.50), получим уравнение, связывающее пролет с ускорениями цели и объекта, в виде

$$\dot{R} = \frac{D}{V_{отн}}\, j_{\Sigma т}, \qquad (1.66)$$

где проекция суммарного ускорения на перпендикуляр к линии дальности $j_{\Sigma т}$ определяется выражением (1.51).

Поскольку в формуле (1.66) $V_{отн} = \text{const}$, то

$$\frac{D}{V_{отн}} = t_в - t, \qquad (1.67)$$

т. е. равно оставшемуся времени полета до момента встречи $t_в$. Поэтому формула (1.66) может быть также представлена в виде

$$\dot{R} = (t_в - t)\, j_{\Sigma т}. \qquad (1.68)$$

Заметим, что на траекториях сближения, близких к встречным, пролет может быть приближенно выражен через линейное отклонение Δh, определяемое выражением (1.52). Действительно, при $\varepsilon_0 = q$ выражения (1.51) и (1.58) совпадают. Поэтому

$$\dot{R} = (t_{\text{в}} - t)\,\Delta\ddot{h}. \tag{1.69}$$

Интегрируя обе части этого уравнения по времени, получим

$$R(t) = (t_{\text{в}} - t)\,\Delta\dot{h} + \Delta h(t). \tag{1.70}$$

Полученные уравнения связи описываются дифференциальными уравнениями и представляют собой инерционные элементы контура наведения. В системах телеуправления, когда сигналы ошибок представляются в виде линейных отклонений, уравнения связи в отличие от контура самонаведения стационарны.

Другим характерным элементом контура телеуправления является метод наведения, наиболее часто используемый в системах управления ракетами [11]. Как отмечалось, метод наведения определяет изменение во времени параметров заданной траектории ракеты, обеспечивающей в отсутствии ошибок измерения ее попадание в цель. Поскольку точность наведения определяется пролетом, то любой закон изменения параметров траектории ракеты, обеспечивающий нулевой пролет в момент встречи, может быть принят в качестве закона наведения. Очевидно, существует бесчисленное множество методов наведения, удовлетворяющих требованию нулевого пролета (или дальности) в один момент встречи. Другими словами, для данной траектории цели существует бесчисленное множество пересекающих ее, по крайней мере в одной точке, траекторий ракеты.

Поэтому при выборе метода наведения принимаем во внимание ряд дополнительных требований к траектории движения ракеты. Наиболее существенными считаем два требования:

1 — траектория должна определяться параметрами цели, которые могут быть измерены с достаточно малыми ошибками;

2 — ускорения при движении по траектории, определяемой законом наведения, должны быть малыми. При этом должны быть максимально использованы баллистические возможности ракеты.

Следует отметить, что эти требования приводят при выборе метода наведения к необходимости учета ошибок измерения датчиками информации параметров траектории цели и ракеты в различных условиях; анализа влияния этих ошибок на точность наведения; значений располагаемых ускорений ракеты; времени ее полета до точки встречи. Строго говоря, метод наведения может быть определен только совместно с контуром управления с учетом систематических и случайных ошибок радиолокаторов и счетно-решающих устройств, а также маневренных возможностей ракеты. При этом задача выбора закона наведения выходит за рамки кинематического анализа процесса наведения и становится задачей синтеза системы наведения с учетом динамических характеристик ее элементов.

Эта задача достаточно сложна и ее математическая формулировка, а также возможные пути решения будут рассмотрены ниже. Здесь мы ограничимся рассмотрением некоторых классических законов наведения, которые являются предельными случаями указанных требований. Идеальным методом наведения с точки зрения необходимого ускорения ракеты, расходуемого на управление, является метод наведения, обеспечивающий ее полет в точку встречи с целью без ускорения. В принципе он может быть реализован, например, при движении ракеты по баллистической траектории, учитывающей характер изменения скорости ракеты, имеющей начало в точке старта, а конец в точке встречи и лежащей в вертикальной плоскости, проведенной через эти две точки [24, 27, 31]. При заданном режиме работы двигателя и известной точке встречи такая траектория может быть осуществлена при управлении начальным углом и величиной вектора скорости в момент старта или начала пассивного участка. Однако с точки зрения использования баллистических возможностей ракеты (обеспечение максимальной дальности активного полета, максимальной средней скорости и т. д.) этот метод может оказаться не оптимальным [7].

Другим существенным недостатком этого метода может быть необходимость определения координат точки встречи и полетного времени по траектории с высокой точностью, определяемой величиной конечного пролета. Для этого необходимо осуществлять пролонгацию траектории цели на длительное время. Большие вычислитель-

ные трудности представляет также задача точного определения времени полета ракеты до точки встречи, которая может быть сведена к системе трансцендентных уравнений.

Таким образом, вопрос о возможности использования закона наведения, обеспечивающего полет в точку встречи, может быть решен при известных характеристиках точности датчиков, вычислителей для определенных классов целей.

К группе методов наведения, основанных на пролонгации траектории цели, относится также метод параллельного сближения, который обеспечивает прямолинейный полет ракеты в точку встречи с целью, движущейся прямолинейно с постоянной скоростью. При выполнении гипотезы о прямолинейности полета цели и отсутствии ошибок измерения координат ускорения ракеты необходимы лишь для компенсации силы тяжести, т. е. $g=9{,}8$ *м/сек²*.

Прямолинейная траектория движения ракеты в точку встречи осуществляется, если вектор дальности ракета — цель имеет постоянное направление (ориентацию) в пространстве, т. е. перемещается параллельно самому себе.

Действительно, линия дальности D будет неподвижна, если угловая скорость ее вращения $\dot{q}$ равна нулю. Из рис. 1.8 можно получить уравнение, связывающее $\dot{q}$ и проекции скоростей ракеты $V_р$ и цели $V_ц$ на перпендикуляр к линии дальности:

$$D\dot{q}=V_р\sin(\theta_р-q)-V_ц\sin(\theta_ц-q). \qquad (1.71)$$

При $D\neq 0$

$$\dot{q}=0, \qquad (1.72)$$

если

$$V_р\sin(\theta_р-q)=V_ц\sin(\theta_ц-q). \qquad (1.73)$$

При постоянных $V_р$ и $V_ц$ равенство (1.73) является условием встречи двух тел, летящих прямолинейно с постоянными скоростями. Это утверждение следует из рис. 1.11, где B обозначена точка встречи, а AB — пер-

пендикуляр к линии дальности D между ракетой Р и целью Ц. Поскольку для встречи в точке В необходимо

$$\frac{ВЦ}{V_ц}=\frac{ВР}{V_р}, \qquad (1.74)$$

но

$$ВЦ=\frac{ВА}{\sin(\theta_ц-q)},\quad ВР=\frac{ВА}{\sin(\theta_р-q)},$$

то из соотношения (1.74) получаем выражение (1.73).

Таким образом, условие постоянства направления вектора дальности ракета-цель есть условие прямолинейного полета в точку встречи при постоянных скоростях $V_р$ и $V_ц$.

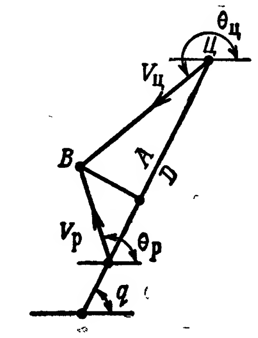


Рис. 1.11. Кинематика связи q с линейными отклонениями

В зависимости от измеряемых параметров траекторий цели и ракеты метод параллельного сближения может быть осуществлен условием (1.72), если измеряется угловая скорость линии дальности D, либо условием

$$q(t)=\mathrm{const}, \qquad (1.75)$$

если измеряется угол вектора D в какой-либо системе координат, либо условием

$$\left.\begin{aligned}\Delta h=h_{зад}(t)-h_р(t)=0;\\ h_{зад}(t)=r_ц\sin(\varepsilon_ц-\varepsilon_0);\quad h_р=r_р\sin(\varepsilon_р-\varepsilon_0),\end{aligned}\right\} \qquad (1.76)$$

если измеряются линейные отклонения цели и ракеты от фиксированной линии отсчета, расположенной под углом ε_0. Различия между условиями (1.72), с одной стороны, и (1.75), (1.76) — с другой, состоят в том, что в первом случае положение вектора D в пространстве не фиксировано, и он остается параллельным направлению, которое имело место в начальный момент выполнения условия (1.72). Во втором случае система наведения стремится обеспечить параллельность вектора D фиксированной линии отсчета.

Поэтому условия (1.75) и (1.76) являются более жесткими в общем случае требованиями, чем условие (1.72).

Уравнение связи (1.50) позволяет оценить потребные ускорения ракеты при наведении по методу параллельного сближения на маневрирующую цель.

Для обеспечения условия $\dot{q}=\ddot{q}=0$ из уравнения (1.50) необходимо, чтобы суммарная проекция ускорения на перпендикуляр к линии дальности $j_{\Sigma т}$ равнялась нулю, начиная с момента t_0, в который $\dot{q}(t_0)=0$. Из (1.51) при этом следует, что проекция ускорения ракеты на перпендикуляр к вектору D должна быть равна проекции ускорения цели на это направление. Поэтому потребные ускорения ракеты для обеспечения метода параллельного сближения близки к ускорениям цели.

Из выражения для определения пролета (1.66) следует, что при методе параллельного сближения он равен нулю при любом t. Недостатком метода параллельного сближения, как, впрочем, и любого «упрежденного метода», является необходимость, помимо остальных параметров, знания дальности от пункта управления до цели. Поскольку дальномерный канал радиолокатора менее помехозащищен, чем угломерные каналы [7], то он определяет низкую помехозащищенность метода, если цель снабжена помехами. Кроме того, в связи с большим упреждением флюктуационные ошибки и перегрузки ракеты могут быть выше, чем при других методах и в нормальных условиях наведения. Реализация метода связана с определенными трудностями. Этих недостатков лишен трехточечный метод наведения, или метод накрытия цели [11], не требующий измерения дальности от пункта управления (радиолокатора) до цели.

При трехточечном методе наведения ракета должна находиться на линии, соединяющей пункт управления с целью. Это требование будет выполнено, если имеет место равенство при плоском движении

$$\varepsilon_р=\varepsilon_ц; \quad \beta_р=\beta_ц \tag{1.77}$$

или

$$\Delta h_r=r_p(\varepsilon_ц-\varepsilon_р)=0. \tag{1.78}$$

Поэтому метод может быть осуществлен при измерении только угловых координат цели (угла места $\varepsilon_ц$ и азимута $\beta_ц$).

Закономерности трехточечного метода наведения могут быть проанализированы на основании равенства (1.77), следствием которого является равенство угловых

скоростей линии дальности ракета-цель и угла места цели, т. е.

$$\dot{q}=\dot{\varepsilon}_{ц}. \qquad (1.79)$$

Если цель летит прямолинейно при $\theta_ц=180°$ с постоянной скоростью $V_ц$, то ее полярные координаты определяются из (1.37) и (1.38) уравнениями (рис. 1.12).

$$\dot{r}_ц=-V_ц\cos\varepsilon_ц; \qquad (1.80)$$

$$r_ц\dot{\varepsilon}_ц=V_ц\sin\varepsilon_ц. \qquad (1.81)$$

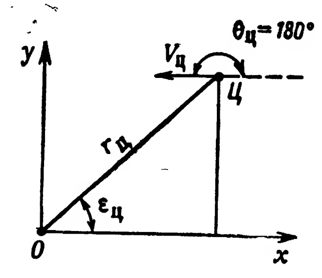


Рис. 1.12. Кинематические связи при трехточечном методе наведения

Как следует из рис. 1.12, параметр цели p, т. е. кратчайшее расстояние от оси x, определяется выражением

$$p=r_ц\sin\varepsilon_ц. \qquad (1.82)$$

Подставляя выражение (1.82) в уравнение (1.81), находим

$$\frac{\dot{\varepsilon}_ц}{\sin^2\varepsilon_ц}=\frac{V_ц}{p}. \qquad (1.83)$$

Из этого уравнения следует

$$\varepsilon_ц(t)=\varepsilon_{ц0}+\operatorname{arcctg}\frac{V_ц t}{p}. \qquad (1.84)$$

При условии (1.77) из уравнения (1.38) имеем

$$r_р\dot{\varepsilon}_ц=V_р\sin(\theta_р-\varepsilon_ц), \qquad (1.85)$$

отсюда

$$\theta_р(t)=\varepsilon_ц+\arcsin\frac{r_р\dot{\varepsilon}_ц}{V_р}. \qquad (1.86)$$

Это выражение определяет угол наклона вектора скорости ракеты при движении по трехточечной траектории. Ускорения ракеты, возникающие при этом, могут быть

определены дифференцированием выражения (1.86) по формуле

$$\dot{j}_р = V_р \dot{\theta}_р, \qquad (1.87)$$

либо из уравнений (1.50, 1.51) при $\dot{V}_ц = \dot{V}_р = \dot{j}_ц = 0$, т. е.

$$\dot{j}_р(t) = \frac{D\ddot{\varepsilon}_ц + 2\dot{D}\dot{\varepsilon}_ц}{\cos\left(\arcsin\frac{r_р\dot{\varepsilon}_ц}{V_р}\right)}. \qquad (1.88)$$

Как показывают расчеты, нормальные ускорения ракеты $j_р(t)$ при трехточечном методе наведения существенно зависят от условий встречи с целью и могут достигать значительных величин.

Поэтому обычно в трехточечный закон наведения вводят поправки упреждения $\varepsilon_{упр}$, спрямляющие траекторию полета ракеты. Методы наведения с упреждением, сформированные на основе трехточечного метода, могут быть записаны в виде

$$\varepsilon_р = \varepsilon_ц + \varepsilon_{упр}. \qquad (1.89)$$

Соответствующим выбором $\varepsilon_{упр}$ можно получить совокупность методов, занимающих промежуточное положение между трехточечным методом и методом параллельного сближения.

При

$$\varepsilon_{упр} = \arcsin\left[\frac{r_ц}{r_р}\sin(\varepsilon_ц - \varepsilon_0)\right] - (\varepsilon_ц - \varepsilon_0), \qquad (1.90)$$

где ε_0 — угол линии отсчета, метод, заданный соотношением (1.89), совпадает с методом параллельного сближения.

Если

$$\varepsilon_{упр} = \varepsilon_{т.в} - \varepsilon_ц, \qquad (1.91)$$

где $\varepsilon_{т.в}$ — угол встречи ракеты с целью, то метод (1.89) обеспечивает прямолинейный полет ракеты в точку встречи при $V_р = \text{const}$. В частности, $\varepsilon_{упр}$ в соотношении (1.89) может быть вычислен при различных гипотезах движения цели до встречи, например:

$$\varepsilon_{упр} = \int_t^{t_в} \dot{\varepsilon}_ц dt, \qquad (1.92)$$

где $t_в$ — момент встречи.

Предположив, что скорость изменения угла места цели и скорость сближения цели и ракеты $\dot{D}$ постоянны, получаем из выражения (1.92)

$$\varepsilon_{\text{упр}} = \dot{\varepsilon}_{\text{ц}} \frac{D}{\dot{D}}, \tag{1.93}$$

где D — текущее расстояние между целью и ракетой.

При рассматриваемых условиях метод, заданный соотношением (1.93), обеспечивает полное спрямление траектории ракеты. Однако такой метод, как и метод параллельного сближения, чувствителен к случайным ошибкам. Поэтому целесообразно рассматривать частичное упреждение траектории цели в виде

$$\varepsilon_{\text{упр}} = \varkappa \frac{D}{\dot{D}} \dot{\varepsilon}_{\text{ц}}, \tag{1.94}$$

где $\varkappa < 1$.

Соотношение (1.94) определяет значение упрежденного угла места цели в промежуточной точке между текущим положением цели и точкой встречи, определяемой значением коэффициента $\varkappa$. Степень упреждения $\varkappa$ зависит от соотношения между случайными и инструментальными ошибками измерения координат и потребными перегрузками метода. Определяющими могут оказаться дополнительные требования. Например, некритичность метода к маневру цели в точке встречи и т. д. Различную кривизну траекторий полета ракеты в одинаковых условиях наведения обеспечивает метод наведения, называемый методом пропорциональной навигации [18]. В этом методе угловая скорость вектора скорости ракеты $\dot{\theta}_{\text{р}}$ пропорциональна угловой скорости вектора дальности ракета — цель $\dot{q}$:

$$\dot{\theta}_{\text{р}} = k\dot{q}, \tag{1.95}$$

где k — навигационная постоянная.

Можно показать [7], что при $k \to \infty$ метод пропорциональной навигации совпадает с методом параллельного сближения, а при $k=1$ с методом наведения по кривой погони, при котором необходимые ускорения ракеты стремятся к бесконечности [11].

Однако в отличие от самонаведения при использовании метода пропорциональной навигации в системе телеуправления возникают трудности вычисления $\dot{q}$ по дан-

ным наземных радиолокаторов. Например, если измеряются полярные координаты, то в плоском движении необходимо определять производную выражения

$$q(t)=\operatorname{arctg}\frac{r_{\text{ц}}\sin(\varepsilon_{\text{ц}}-\varepsilon_0)-r_p\sin(\varepsilon_{\text{р}}-\varepsilon_0)}{r_{\text{ц}}\cos(\varepsilon_{\text{ц}}-\varepsilon_0)-r_{\text{р}}\cos(\varepsilon_{\text{р}}-\varepsilon_0)}, \qquad (1.96)$$

что может быть осуществлено с необходимой точностью только с применением цифровых вычислительных машин. Кроме того, при телеуправлении по методу пропорциональной навигации обычно существенно возрастают флюктуационные перегрузки в конце участка наведения, что во многих случаях может оказаться недопустимым. Анализ методов наведения [7, 18, 11] показывает, что при наличии информации о дальности до цели наряду с ее угловыми координатами может быть обеспечена траектория движения ракеты, близкая к прямой линии при прямолинейном движении цели. Ускорения ракеты в процессе наведения при этом определяются ошибками измерения координат цели и ракеты. Отказ от измерения дальности до цели (трехточечный метод наведения) приводит к значительной кривизне траектории ракеты. Вместе с тем анализ влияния ошибок измерений на потребные ускорения ракеты при том или ином методе наведения может быть проведен лишь при рассмотрении контура управления в целом. При этом возникает задача определения оптимального метода наведения и метода обработки информации в системе [31]. Эта задача будет рассмотрена в дальнейшем.

Глава II

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ КОНТУРА УПРАВЛЕНИЯ

Как следует из гл. I, существенную роль в системе телеуправления играют ограничения как на управления, так и на фазовые координаты. В связи с этим во второй главе излагается метод определения оптимальных законов управления с учетом ограничений, который применяется в последующих главах к различным задачам расчета систем телеуправления.

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Основной задачей контура управления в системе телеуправления, решающей задачу наведения, является обеспечение точности в момент встречи $t_в$. Как отмечалось в 1.2, точность наведения может характеризоваться математическим ожиданием M от скалярной функции F вектора фазовых координат цели и наводящегося объекта $\boldsymbol{x}$ в момент встречи. Таким образом, в качестве критерия качества контура управления I рассматривается функционал

$$I = M\{F[\boldsymbol{x}(t_в)]\}. \qquad (2.1)$$

Вектор фазовых координат наводящегося объекта и цели $\boldsymbol{x}$ размерности $n \times 1$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений, которая в общем случае записывается в виде

$$\dot{x} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \xi, t); \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^\circ, \qquad (2.2)$$

где $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — управляющие воздействия на наводящийся объект и цель.

В частности, $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ могут являться ускорениями этих объектов или характеризовать углы отклонения рулей и т. д. В общем случае они являются векторами размерности $\boldsymbol{u}(r\times 1)$ и $\boldsymbol{v}(m\times 1)$.

Вектор случайных воздействий $\xi(n\times 1)$ характеризует возмущения, действующие непосредственно на наводящийся объект. В системе телеуправления $\xi(t)$ является в основном следствием ошибок линии передачи команд и описывается белым шумом (1.3) с известной дисперсионной матрицей $\boldsymbol{M}(t)$:

$$M[\xi(t_1)\xi^T(t_2)]=M(t_1)\delta(t_1-t_2). \quad (2.3)$$

Значения вектора фазовых координат $\boldsymbol{x}$ в момент t_0 являются случайными начальными условиями процессов наведения и имеют известные статистические характеристики.

Момент встречи $t_в$ определяется из условия минимума дальности от наводящегося объекта до цели D:

$$D(t_в)=\inf_t\{D[\boldsymbol{x}(t),\ t]\} \quad (2.4)$$

на рассматриваемом интервале времени $(t_0,\ T)$, или минимума функции $F[\boldsymbol{x}(t)]$ в функционале (2.1).

Вектор управлений наводящегося объекта $\boldsymbol{u}$ в общем является детерминированным оператором от вектора измерений $\boldsymbol{z}$ размерности $(l\times 1)$. Управление будем считать физически осуществимым, если в момент t оно зависит лишь от значений $\boldsymbol{z}$, полученных в прошлые моменты времени, т. е.

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}(\tau),\ t), \quad \tau\leqslant t. \quad (2.5)$$

Вектор измерений содержит данные о фазовых координатах наводящегося объекта и цели, получаемые радиолокаторами системы телеуправления, с ошибками $\boldsymbol{n}(t)$. Поскольку ошибки, являющиеся векторным белым шумом размерности $(l\times 1)$ с корреляционной матрицей

$$M[\boldsymbol{n}(t_1)\boldsymbol{n}^T(t_2)]=\boldsymbol{N}(t_1)\delta(t_1-t_2), \quad (2.6)$$

содержат не только аддитивные, но и мультипликативные составляющие, вектор $\boldsymbol{z}$ записывается в общем виде выражением

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{n},\ t). \quad (2.7)$$

Согласно 1.2 вектор управлений $u(t)$, как и вектор $v(t)$, удовлетворяет «жестким» ограничениям

$$u \in U, \tag{2.8}$$

т. е. принадлежит замкнутой (имеющей фиксированную границу) области U и интегральным ограничениям в виде

$$M\left[\int_{t_0}^{t_в} u^T(t)\varrho(t)u(t)dt\right] \leqslant c, \tag{2.9}$$

где матрица $\varrho(t)$ $(r \times r)$ положительно-определенная.

Смысл условий (2.8) и (2.9) разъяснен в 1.2.

Контур управления будем называть оптимальным, если управляющее воздействие $u(t)$ минимизирует критерий (2.1) и удовлетворяет ограничениям (2.8) и (2.9) при заданных статистических характеристиках случайных возмущений $\xi(t)$ и $n(t)$ и начальных условий $x(t_0)$.

При этом поведение цели может быть задано либо априорными статистическими характеристиками, либо оказывающим противодействие наводящемуся объекту в пределах ее энергетических и информационных возможностей. В последнем случае цель, создавая организованные помехи, может изменять структуру вектора Z [см. выражение (2.7)] и выбирать закон управления $v(t)$ для увеличения критерия (2.1) [22].

Рассматриваемая задача оптимизации управления $u(t)$ представляет собой специфическую вариационную задачу, особенность которой определяется зависимостью функционала I [см. выражение (2.1)] от момента встречи $t_в$, который, в свою очередь, зависит от процесса наведения. В частном случае при заданном $t_в$ рассматриваемая задача сводится к задаче управления конечным состоянием. Если условие (2.4) совпадает с функционалом (2.1), то задача оптимизации является вариационной задачей с произвольным правым концом. Когда условие (2.4) может быть представлено в виде дифференциального или алгебраического соотношения, приходим к задаче с условием трансверсальности на правом конце.

Сформулированную выше задачу при нефиксированном виде зависимости управления u от вектора z назовем задачей оптимизации в произвольном классе управлений.

Большой практический интерес могут представлять также задачи оптимизации управления при частично или

полностью заданной структуре управления, т. е. при заданном классе операторов, определяющих зависимость вектора $\boldsymbol{u}$ от измерений $\boldsymbol{z}$ и времени t. При этом определяются оптимальные значения постоянных величин или функции времени.

Многие принципиальные результаты для систем телеуправления могут быть получены при рассмотрении линейной системы наведения. В этом случае система уравнений (2.2) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_u\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}_v\boldsymbol{v} + \xi; \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}^\circ, \end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

где $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_u$, $\boldsymbol{B}_v$ — матрицы размерности $(n\times n)$, $(n\times r)$ и и $(n\times m)$ соответственно, а вектор управлений $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}, t)$ является линейным оператором от вектора $\boldsymbol{z}$

$$\boldsymbol{u}(t) = \int_{t_0}^{t} w(t, \tau)\,\boldsymbol{z}(\tau)\,d\tau, \qquad (2.11)$$

где $w(t, \tau)$ матрица $(r\times l)$ импульсных переходных функций, определяемая при решении задачи. В линейной задаче вектор $\boldsymbol{z}$ также предполагается линейной функцией фазовых координат

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}. \qquad (2.12)$$

Матрица $\boldsymbol{C}$ в уравнении (2.12) размерности $(l\times n)$ позволяет выделить из вектора $\boldsymbol{x}$ измеряемые в системе наведения фазовые координаты.

Для систем телеуправления характерна возможность сведения задачи к рассмотрению линейной стационарной системы наведения. В этом случае матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_u$, $\boldsymbol{B}_v$ и $\boldsymbol{C}$ являются постоянными, а

$$w(t, \tau) = w(t-\tau)$$

сводится к функции одной переменной.

2.2. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ

Получим сначала необходимые условия оптимальности управления для фиксированного момента встречи $t_в$ и статистически заданного поведения цели $\boldsymbol{v}(t)$. Эта задача сводится к минимизации функционала

$$I = \min_{\boldsymbol{u}\in U} M\left\{\int_{t_0}^{t_в} f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \xi, \tau)\,d\tau + F\,[\boldsymbol{x}(t_в)]\right\}, \qquad (2.13)$$

где математическое ожидание M означает среднее по начальным условиям $\boldsymbol{x}^0$, возмущениям $\xi(t)$ и $\boldsymbol{n}(t)$, а также управлениям цели $\boldsymbol{v}(t)$. Функция $f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \xi, t)$ учитывает интегральные ограничения на управления $\boldsymbol{u}(t)$.

Фазовые координаты $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяют уравнениям (2.2), а функции f_i, $i=0, 1, \ldots$ предполагаются непрерывными ограниченными функциями своих аргументов и дважды дифференцируемыми по $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$.

Ограниченность области U возможных значений управлений $\boldsymbol{u}(t)$ вызывает трудности применения классических методов вариационного исчисления. Поэтому для решения этой задачи более удобно использовать методы динамического программирования или принцип максимума [3, 15].

Для получения условий оптимальности $\boldsymbol{u}(t)$ в форме уравнения динамического программирования обозначим

$$\varphi[\boldsymbol{x}(t), t] = \int_t^{t_в} f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \tau)\, d\tau + F[\boldsymbol{x}(t_в)]. \quad (2.14)$$

Тогда

$$I = \min_{\boldsymbol{u} \in U} M[\varphi(\boldsymbol{x}(t_0), t_0)]. \quad (2.15)$$

Заменяя в выражении (2.14) t на $t+\Delta t$ и вычитая его из (2.14), получим

$$\varphi[\boldsymbol{x}(t), t] = \varphi[\boldsymbol{x}(t+\Delta t), t+\Delta t] + \int_t^{t+\Delta t} f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \xi, \tau)\, d\tau. \quad (2.16)$$

Пусть далее t_0^* обозначает момент начала измерений вектора $\boldsymbol{z}$ в выражении (2.7). В общем случае момент t_0^* начала поступления информации не совпадает с моментом t_0 начала процесса управления, более того обычно $t_0^* < t_0$.

Используем свойство условных математических ожиданий, по которому предварительное усреднение при увеличении объема заданной информации по сравнению с объемом информации при последующих усреднениях не

изменяет результата усреднения [12]. Математически этот факт выражает равенство

$$M\left[Y(z)\Big|_{z_{t_0^*}^{\tau}}\right]=M\left\{M\left[Y(z)\Big|_{z_{t_0^*}^{t}}\right]z_{t_0^*}^{\tau}\right\} \qquad (2.17)$$

при $\tau \leqslant t$.

Здесь V произвольная функция (функционал) наблюдений z, математическое ожидание от которой существует, через $z_{t_0^*}^{t}$ и $z_{t_0^*}^{\tau}$ обозначена совокупность (реализация) измеренных значений вектора z соответственно на интервалах времени (t_0^*, t) и (t_0^*, τ).

На основании соотношения (2.17) и учитывая, что в функционале (2.13) усреднение осуществляется при отсутствии измерений, получаем, что минимум функционала I будет обеспечен выбором управления, минимизирующего функционал J при условном математическом ожидании

$$J=\min_{u\in U} M\left[\varphi(x(t_0), t_0)\Big|_{z_{t_0^*}^{t_0}}\right], \qquad (2.18)$$

где использовано выражение (2.15).

Обозначим далее

$$S\left(z_{t_0^*}^{t}, t\right)=\min_{u_t^{\text{в}}\in U} M\left[\varphi(x(t), t)\Big|_{z_{t_0^*}^{t}}\right] \qquad (2.19)$$

значение функционала, получаемого выбором значений управления на интервале $(t, t_{\text{в}})$ при полученных измерениях до момента t. Тогда минимизируемый функционал (2.18) может быть представлен в виде

$$S\left(z_{t_0^*}^{t_0}, t_0\right)=\min_{u_{t_0}^{t_0+\Delta t}\in U} M\times$$

$$\times\left[S\left(z_{t_0^*}^{t_0+\Delta t}, t_0+\Delta t\right)+\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f_0(x, u, v, \tau)\,d\tau\Big|_{z_{t_0^*}^{t_0}}\right]. \qquad (2.20)$$

При получении зависимости (2.20) использовано выражение (2.16), свойство условных математических ожиданий по отношению к функции $\varphi(x(t_0+\Delta t), t_0+\Delta t)$ и факт независимости второго слагаемого в правой части (2.16) от значений управлений на интервале $(t+\Delta t, t_{\text{в}})$. Как обычно при получении уравнения Беллмана, момент t_0 яв-

ляется произвольным, поэтому условие оптимальности управления u зависимости (2.20) должно быть выполнено для произвольного t интервала управления:

$$S\left(z_{t_0^*}^t,\ t\right)=\min_{u_t^{t+\Delta t}\in U} M\times$$

$$\times\left[S\left(z_{t_0^*}^{t+\Delta t},\ t+\Delta t\right)+\int_t^{t+\Delta t} f_0(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \tau)d\tau\Big|_{z_{t_0^*}^t}\right]. \qquad (2.21)$$

Необходимое условие оптимальности (2.21) является функциональным уравнением, решение и исследование его — трудная задача. Поэтому преобразуем это условие к форме принципа максимума, что позволяет в ряде задач использовать приближенные методы решения. Для этого запишем уравнение (2.21) в виде равенства

$$\min_{u_t^t\text{в}\in U} M\left[\varphi(\boldsymbol{x}(t+\Delta t),\ t+\Delta t)-\varphi(\boldsymbol{x}(t),\ t)+\right.$$

$$\left.+\int_t^{t+\Delta t} f_0(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \tau)d\tau\right]_{z_{t_0^*}^t}=0 \qquad (2.22)$$

на основании определения функции $\varphi(\boldsymbol{x},\ t)$ по уравнению (2.14),

$$\varphi(\boldsymbol{x}(t+\Delta t),\ t+\Delta t)-\varphi(\boldsymbol{x}(t),\ t)=\int_t^{t+\Delta t}\frac{d\varphi(\boldsymbol{x},\ \tau)}{d\tau}d\tau. \qquad (2.23)$$

Поэтому соотношение (2.22) можно переписать в более компактной форме

$$\min_{u_t^t\text{в}\in U} M\left\{\int_t^{t+\Delta t}\left[\frac{d\varphi(\boldsymbol{x},\ \tau)}{d\tau}+f_0(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \tau)\right]d\tau\Big|_{z_{t_0^*}^t}\right\}=0. \qquad (2.24)$$

Очевидно, что равенство (2.24) будет выполнено, если в каждый момент t управление $\boldsymbol{u}(t)$ определить из условия

$$\min_{u\in U} M\left[\frac{d\varphi(\boldsymbol{x},t)}{dt}+f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},t)\Big|\, z_{t_0^*}^t\right]=0. \qquad (2.25)$$

Из определения полной производной

$$\frac{d\varphi(\boldsymbol{x},t)}{dt}=\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x},t)}{\partial\boldsymbol{x}}\cdot f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},t). \qquad (2.26)$$

Обозначим через $\psi(t)$ вектор-функцию размерности $(n+1\times1)$ с элементами

$$\left.\begin{aligned} &\psi_0=-1; \\ &\psi_i(t)=-\frac{\partial\varphi(x,\ t)}{\partial x_i};\ i=1,\ldots n; \\ &\psi_{n+1}=-\frac{\partial\varphi(x,\ t)}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad (2.27)$$

и введем стохастический гамильтониан, равный скалярному произведению

$$H(x,\ \psi,\ u,\ v,\ t)=\psi^{\mathrm{T}}(t)f(x,\ u,\ v,\ t), \qquad (2.28)$$

где вектор f имеет размерность $(n+1\times1)$;

$$f(x,\ u,\ v,\ t)=\{f_0(x,\ u,\ v,\ t),\ f_1(x,\ u,\ v,\ t),\ 1\}, \qquad (2.29)$$

где $f(x,\ u,\ v,\ t)$ вектор $(n\times1)$, составляющий правую часть системы (2.2).

Используя выражение (2.16), можно переписать условие оптимальности управления (2.13) в форме стохастического принципа максимума

$$\max_{u\in U} M\left[H(x,\ \psi,\ u,\ v,\ t)\Big|_{z_{t_0}^{*}}^{t}\right]=0. \qquad (2.30)$$

Вектор $\psi(t)$ может быть определен системой уравнений аналогично принципу максимума в детерминированном случае [13]. Дифференцируя выражение (2.27), получим

$$\frac{d\psi}{dt}=-\frac{\partial^2\varphi\ (x,\ t)}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2\varphi\ (x,\ t)}{\partial x\,\partial x}f(x,\ u,\ v,\ t), \qquad (2.31)$$

где $\dfrac{\partial^2\varphi\ (x,\ t)}{\partial x\,\partial x}$ — матрица $(n\times n)$ с элементами $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}$. Согласно определению функции $\varphi(x,\ t)$ [см. выражение (2.14)] и соотношению для полной производной (2.26), получим

$$\frac{\partial\varphi\ (x,\ t)}{\partial t}=-f_0(x,\ u,\ v,\ t)-\frac{\partial\varphi\ (x,\ t)}{\partial x}f(x,\ u,\ v,\ t). \qquad (2.32)$$

Подставляя выражение (2.32) в соотношение (2.31), находим

$$\frac{d\psi}{dt}=-\frac{\partial H\ (x,\ \psi,\ u,\ t)}{\partial x}, \qquad (2.33)$$

или, учитывая обозначение (2.28),

$$\frac{d\psi}{dt} = -\psi^{\mathrm{T}} \frac{\partial f(x, u, v, t)}{\partial x}. \qquad (2.34)$$

Система n дифференциальных уравнений (2.33) совпадает с системой уравнений для сопряженных функций в детерминированном случае принципа максимума [15]. Начальные условия для этой системы могут быть найдены из выражений (2.27). При $t = t_{\text{в}}$

$$\varphi(x, t_{\text{в}}) = F[x(t_{\text{в}})] \qquad (2.35)$$

и вектор

$$\psi(t_{\text{в}}) = -\frac{\partial F[x(t_{\text{в}})]}{\partial x(t_{\text{в}})}. \qquad (2.36)$$

Особенность рассматриваемой статической задачи по сравнению с детерминированной состоит в том, что гамильтониан $H(x, \psi, u, v, t)$ и функции $\psi(t)$ являются случайными, а система уравнений (2.33) стохастической системой дифференциальных уравнений. Поэтому численные методы к решению этой задачи могут быть применены лишь в частных случаях, что существенно усложняет процедуру получения оптимального управления u.

Поскольку гамильтониан H является функцией от значения управления u в момент t, которое зависит от реализации z лишь на интервале наблюдения до момента t, управление $u(t)$ в формуле (2.30) является неслучайным по отношению к условному математическому ожиданию и может быть вынесено за его знак. Операция усреднения применяется в условии оптимальности (2.30) по отношению к функциям $f(u, x, v, \xi, t)$, ψ и x. Результат усреднения формулы (2.30) не зависит от переменных ψ и x, а является функцией только наблюдаемых величин z на интервале (t_0^*, t). Поэтому управление $u(t)$, определенное из формулы (2.30), также будет зависеть только от полученных значений вектора z на интервале (t_0^*, t) и будет удовлетворять условию физической осуществимости (2.5).

Условия оптимальности (2.21) и (2.30) эквивалентны, поскольку они вытекают одно из другого, и являются необходимыми условиями оптимальности управления $u(z, t)$ в том смысле, что могут быть получены на основе исследования первой вариации функционала I и не учитывают характера вариации I второго порядка.

Выше предполагалось, что момент встречи $t_в$ известен. В задачах наведения момент $t_в$ можно рассматривать как функцию фазовых координат, определяемую условием типа (2.4). Если это условие может быть выражено в виде алгебраического или дифференциального соотношения вида

$$D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t_в)=c, \qquad (2.37)$$

то его можно рассматривать как ограничение на значения фазовых координат и момент встречи $t_в$. Учет такого типа условий в вариационном исчислении осуществляется с помощью условий трансверсальности [6]. Уравнения оптимальности (2.21) и (2.30) при этом остаются в силе, а граничные условия (2.36) на сопряженные переменные $\psi(t)$ изменяются.

2.3. УЧЕТ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Условия оптимальности (2.21) и (2.30) получены в предположении, что управление $\boldsymbol{u}(t)$ определено в замкнутой области U, т. е. не превосходит, например, в каждый момент времени определенной величины.

В задаче, рассмотренной в 2.1, существенную роль играют также интегральные или изопериметрические ограничения, которые представляются в виде неравенств:

$$M\left[\int_{t_0}^{t_в} f_{n+2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\,dt\right] \leqslant c_M \qquad (2.38)$$

или

$$\int_{t_0}^{t_в} f_{n+2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\,dt \leqslant c, \qquad (2.39)$$

где c_M и c известные постоянные величины, вектор $\boldsymbol{x}$ удовлетворяет системе уравнений (2.2), скалярные функции f_{n+2} знакоопределены, непрерывны и дважды дифференцируемы по переменным $\boldsymbol{x}$, u, t в области их определения. Операция математического ожидания в (2.38) берется по начальным значениям фазовых координат $\boldsymbol{x}^0$, случайным возмущениям и ошибкам измерений.

Если обозначить

$$\dot{x}_{n+2}=f_{n+2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t); \quad x_{n+2}(t_0)=0, \qquad (2.40)$$

где x_{n+2} компонента расширенного вектора фазовых ко-

ординат x, то неравенства (2.38) и (2.39) можно записать в компактном виде

$$M[x_{n+2}(t_в)] \leqslant c_М; \quad (2.41)$$

$$x_{n+2}(t_в) \leqslant c. \quad (2.42)$$

Различие между ограничениями (2.41) и (2.42) состоит в том, что второе из них должно выполняться для каждой реализации случайных начальных условий и возмущений, а первое ограничивает значение фазовой координаты только в среднем и может нарушаться в определенных реализациях. Поэтому условие (2.42), эквивалентное ограничению в детерминированных задачах, является более жестким, чем ограничение (2.41), и не может быть выполнено, в частности, при неограниченном законе распределения x_{n+2} для конечной константы c. Для учета ограничений (2.41) и (2.42) в условиях оптимальности (2.30) используем метод перехода от замкнутой области изменения значения координаты $x_{n+2}(t_в)$, определяемой неравенствами, к открытой области изменения координаты [19].

Для ограничения (2.42) это может быть осуществлено с помощью функции $\chi_М$ координаты $x'_{n+1}(t_в)$ такой, что

$$\chi_M(x'_{n+2}) = \begin{cases} Mx_{n+2} \text{ и } \left[\dfrac{\partial \chi_M}{\partial x'_{n+2}}\right] \neq 0, \\ \text{если } M[x_{n+2}(t_в)] < c_M \\ c_M \text{ и } \dfrac{\partial \chi_M}{\partial x'_{n+2}} = 0, \\ \text{если } M[x_{n+2}(t_в)] \geqslant c_M \end{cases} \quad (2.43)$$

при изменении x'_{n+2} в открытой области.

Используя далее метод множителей Лагранжа и учитывая, что вариация

$$\delta M[x_{n+2}(t_в)] = \frac{\partial \chi_M(x'_{n+2})}{\partial x'_{n+2}} \delta x'_{n+2}(t_в), \quad (2.44)$$

получим аналогично детерминированному случаю [19], что постоянный множитель Лагранжа ψ_{n+2} должен удовлетворять условию

$$\psi_{n+2} \frac{\partial \chi_M(x'_{n+2})}{\partial x'_{n+2}} = 0. \quad (2.45)$$

С учетом дополнительного уравнения (2.40), определяющего компоненту x_{n+2} вектора фазовых координат, функция Гамильтона (2.28) запишется в виде

$$H(x, \psi, u, t)=\psi^T f(x, u, \xi, v, t)+\psi_{n+2} f_{n+2}(x, u, t), \qquad (2.46)$$

а условие оптимальности (2.30) определится уравнением

$$\max_{u(t)\in U} M\left[H(x, \psi, u, t)\Big|_{z_{t_0^*}}^{t}\right]=0, \qquad (2.47)$$

где H определяется выражением (2.46).

Сравнение условий оптимальности с учетом ограничения (2.41) и без него показывает, что при $\frac{\partial \chi_M}{\partial x'_{n+2}} \neq 0$, т. е. когда условие (2.41) выполняется при строгом неравенстве (2.43) множитель ψ_{n+2} в (2.45) должен быть равен нулю и условия оптимальности (2.47) совпадают с (2.30). Поэтому ограничение (2.41) не влияет на вид условий оптимальности, если при оптимальном управлении не нарушается неравенство (2.41). Если же $\frac{\partial \chi_M}{\partial x'_{n+2}}=0$, то ψ_{n+2}, как следует из (2.45), является неопределенной величиной, в общем случае отличной от нуля. При этом условия оптимальности управления $u(t)$ изменяются и принимают вид (2.47), что является следствием нарушения ограничения (2.41) согласно определению функции χ_M [см. условия (2.43)]. Таким образом, ограничение в виде неравенства (2.41) может не учитываться при оптимизации, если при оптимальном управлении, найденном без учета (2.41), оно не нарушается. В противном случае оптимальная задача должна быть решена снова с учетом множителя Лагранжа ψ_{n+2}.

Заметим, что при

$$f_{n+2}(x, u, t)>0 \qquad (2.48)$$

постоянный множитель Лагранжа

$$\psi_{n+2} \leqslant 0. \qquad (2.49)$$

Действительно, поскольку при $\psi_{n+2}>0$ слагаемое в (2.46)

$$\psi_{n+2} f_{n+2}(x, u, t)>0, \qquad (2.50)$$

в (2.46) и максимум функции (2.47) будет достигнут при максимальных значениях $u(t)$, т. е. лежащих на границе области U при каждом значении t. Так как условие (2.41) имеет смысл только, если оно не выполняется при граничных значениях управления (в противном случае оно не может быть нарушено), неравенство в (2.41) не может быть обеспечено при $\psi_{n+2}>0$.

Неравенство (2.39) или (2.42), ограничивающее область значений интеграла от фазовых координат и управляющего воздействия для каждой реализации начальных условий и возмущений, может быть учтено при оптимизации управления $u(t)$ аналогично (2.38).

Предположим, что для каждой реализации аргументов функция f_{n+2} ограничена и существует случайное число ψ_{n+2} (множитель Лагранжа) в законе управления, выбором которого можно обеспечить выполнение (2.42). При этом ψ_{n+2} является функционалом от $\xi(t)$, $n(t)$ и случайных начальных условий x^0.

Аналогично предыдущему может быть введена такая функция χ случайной координаты $x'_{n+2}(t_в)$, что

$$x_{n+2}(t_в)=\chi\left[x'_{n+2}(t_в)\right] \quad (2.51)$$

и

$$\frac{\partial\chi}{\partial x'_{n+2}}\neq 0 \quad \text{при} \quad x_{n+2}(t_в)<c,$$

а также

$$\chi\left[x'_{n+2}(t_в)\right]=c;\ \frac{\partial\chi}{\partial x'_{n+2}}=0, \quad (2.52)$$

если $x_{n+2}(t_в)\geqslant c$. При этом решение задачи выбора управления определяется в каждой конкретной реализации условием

$$\psi_{n+2}\frac{\partial\chi\left[x'_{n+2}(t_в)\right]}{\partial x'_{n+2}(t_в)}=0. \quad (2.53)$$

Из (2.53) следует, что в зависимости от реализации $\xi(t)$, $n(t)$, x^0 задачу надо решать либо без учета ограничения (2.42), если

$$\frac{\partial\chi\left[x'_{n+2}\right]}{\partial x'_{n+2}}\neq 0,$$

либо с учетом (2.42) со знаком равенства, если

$$\frac{\partial\chi\,[x'_{n+2}]_f}{\partial x'_{n+2}}=0.$$

При этом оптимальное управление $u(t)$ определяется из условия максимума математического ожидания функции H (2.47), где ψ_{n+2} является функционалом случайного вектора фазовых координат и управления.

Для решения задачи существенно, что ψ_{n+2} является постоянной величиной. Поэтому вид функциональной зависимости от параметров управления не меняется во времени и может быть определен на всем интервале $(t_0, t_в)$, если он известен, по крайней мере, в один момент времени.

Такая возможность имеется, если координаты и управление, входящие в функцию $f_{n+2}(x, u, t)$, измеряются точно (известны) в процессе управления. При этом в последний момент получения информации $z\ (t_n)$ левая часть (2.39) известна и ψ_{n+2} не является случайной по отношению к условному математическому ожиданию при заданных значениях реализации вектора z на интервале $(\overset{*}{t}_0, t_n)$.

В момент t_n оптимальное управление определяется из условия

$$\max_{u(t_n)\in U} M\,\{\psi^T(t_n)\,f(x(t_n),\ u(t_n),\ t_n)+ \\ +\psi_{n+2}f_{n+2}(x(t_n),\ u(t_n),\ t_n)\Big|_{z}{}^{t_n}_{\overset{*}{t}_0}\Big\}=0, \qquad (2.54)$$

где ψ_{n+2} может быть вынесена за знак математического ожидания. Определенное из (2.54) $u(t_n)$ является функцией ψ_{n+2}. Подставляя $u(t_n)$ в соотношение (2.39), выразим ψ_{n+2} через прошлые значения фазовых координат управления и измеряемого вектора z. При оптимизации в другие моменты времени $t_0<t<t_n$ ψ_{n+2} является уже известным функционалом от параметров управления. При этом успех решения задачи определяется возможностью нахождения условного математического ожидания от функции H.

Очевидно, если в функцию f_{n+2} в соотношение (2.39) входят составляющие вектора фазовых координат, которые в процессе управления измеряются с ошибками, условие (2.39) может быть удовлетворено лишь в вероятно-

стном смысле. Например, можно потребовать, чтобы вероятность

$$P[x_{n+2}(t_{в})-c \leqslant 0]=1-\varepsilon, \qquad (2.55)$$

где $\varepsilon>0$ — малая величина. При этом условие (2.39) сводится к условию (2.38).

Таким образом, при интегральных (изопериметрических) ограничениях типа неравенства в статистических задачах изменяется вид Гамильтониана H аналогично детерминированному случаю [6].

2.4. УЧЕТ ОГРАНИЧЕНИЙ СТРУКТУРЫ В УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Рассмотренный метод определяет условия оптимальности управления $\boldsymbol{u}(t)$ (2.30) в произвольном классе кусочнонепрерывных функций. При этом оператор связи управления $\boldsymbol{u}$ с наблюдаемым вектором $z(t)$ также произвольный.

Часто представляют интерес задачи оптимизации управления при заданном классе операторов связи $\boldsymbol{u}$ с $\boldsymbol{z}$. Такие задачи далее будем называть задачами оптимизации систем с заданной структурой.

Одним из возможных путей решения этой задачи является математическая формулировка условий выделения класса операторов. В этом случае при оптимизации накладываются такие ограничения, которые при использовании метода (см. 2.2) приводят к заданному виду оператора, связывающего $\boldsymbol{u}$ с $\boldsymbol{z}(t)$. Однако этот путь, как правило, достаточно трудоемок.

Повидимому, более перспективен метод задания вида оператора и определения условий оптимальности при непосредственном вычислении его вариации. Далее мы предположим, что оператор связи управления с наблюдаемой реализацией $\boldsymbol{z}(t)$ является линейным

$$\boldsymbol{u}(t)=\int_{t_0}^{t} w(t, \tau)\, \boldsymbol{z}(\tau)\, d\tau \qquad (2.56)$$

либо стационарным линейным оператором

$$\boldsymbol{u}(t)=\int_{0}^{t-t_0} w(\tau)\, \boldsymbol{z}(t-\tau)\, d\tau. \qquad (2.57)$$

В этих выражениях w является матрицей импульсных переходных функций $(r \times l)$, которая определяется при решении вариационной задачи.

Для определенности будем также считать, что в задаче оптимизации 2.1 наблюдаемый вектор $z(t)$ определяется выражением (2.12).

$$z(t) = Cx + n. \tag{2.58}$$

В связи с тем, что вид условий оптимальности существенно зависит от вида оператора объекта управления (2.2), ниже будут рассмотрены задачи, когда операторы объекта и управляющего воздействия принадлежат к одному классу и к разным классам операторов. Отметим, что выделение оператора объекта наряду с оператором управления w необходимо только тогда, когда оператор объекта принадлежит к классу, более общему, чем оператор управления, или они принадлежат к разным классам. Если же оператор объекта принадлежит к классу операторов управления, их комбинацию при оптимизации можно рассматривать как единый оператор, поскольку это преобразование не расширяет класса вариаций оператора управления. Разделение операторов в этом случае может быть проведено после решения задачи оптимизации методом структурных преобразований.

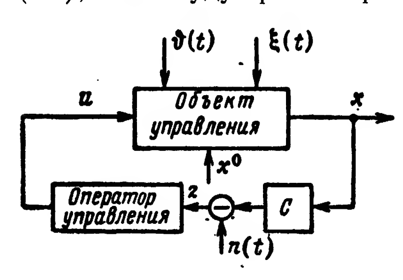


Рис. 2.1. Структурная схема системы управления

Определим условия оптимальности оператора управления w в типичных задачах оптимизации для системы с заданной структурой, схема которой представлена на рис. 2.1.

Задача 1. *Оптимизация линейного оператора управления нелинейным объектом*

В этой задаче объект управления описывается системой уравнений (2.2), а оператор управления выражением (2.56). Поскольку управляющее воздействие определяется здесь в открытой области, к решению применим метод классического вариационного исчисления, состоя-

щий в приравнивании к нулю первой вариации функционала

$$I = M\{F[x(t_в)] + x_0(t_в)\}. \qquad (2.59)$$

В выражении (2.59) обозначено

$$x_0(t_в) = \int_{t_0}^{t_в} f_0(x, u, t)\,dt. \qquad (2.60)$$

Операция математического ожидания осуществляется в (2.59) по начальным условиям x^0, возмущениям $\xi(t)$, $n(t)$ и не зависит от управления. Поэтому вариация функционала δI может быть записана в виде

$$\delta I = M\left[\frac{\partial F[x(t_в)]}{\partial x(t_в)}\delta x(t_в) + \delta x_0(t_в)\right] \qquad (2.61)$$

с точностью до бесконечно малых величин $\delta x(t_в)$. Аналогично [13] введем вектор-функцию $\psi(t)$ размерности $(n+1)\times 1$ такую, что

$$-\delta I = M\left[\psi^T(t_в)\,\delta X(t_в)\right], \qquad (2.62)$$

где вектор $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Выражение (2.62) можно записать в виде

$$\delta I = M\left\{\int_{t_0}^{t_в} \frac{d}{dt}\left[\psi^T(t)\,\delta X(t)\right] dt\right\} =$$

$$= M\left\{\int_{t_0}^{t_в}\left[\frac{d\psi^T}{dt}\delta X + \psi^T\frac{d\delta X}{dt}\right] dt\right\}. \qquad (2.63)$$

Для системы уравнений $n+1$ порядка

$$\dot{x} = f(x, u, \xi, t); \quad x(t_0) = x^\circ, \qquad (2.64)$$

которой удовлетворяет расширенный вектор фазовых координат, можно записать систему уравнений в вариациях [15] с точностью до δx

$$\frac{d\delta x}{dt} = \frac{\partial f(x, u, \xi, t)}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f(x, u, \xi, t)}{\partial u}\delta u, \qquad (2.65)$$

где $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial u$ матрицы частных производных с элементами $\partial f_i/\partial x_j$ и $\partial f_i/\partial u_k$ $(i,\ j = 0, 1, \ldots, n;$ $k = 1, 2, \ldots, r)$.

Вариация управления δu определяется с точностью до величин δx из (2.56) и (2.58) выражением

$$\delta u(t)=\int_{t_0}^{t_\text{в}}\delta w(t,\tau)z(\tau)+w(t,\tau)C\,\delta x(\tau)]\,d\tau. \quad (2.66)$$

Условие (2.62) определяет значения вектора $\psi(t)$ в момент $t_\text{в}$. Сравнивая (2.62) и (2.61), получаем

$$\psi_0(t_\text{в})=-1,\quad \psi_i(t_\text{в})=-\frac{\partial F[x(t_\text{в})]}{\partial x_i(t_\text{в})};\quad i=1,2,\ldots,n. \quad (2.67)$$

Определим далее $\psi(t)$ при $t_0\leqslant t<t_\text{в}$ системой уравнений

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=-\left[\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\right]^T\psi(t)-$$

$$-C^T\int_t^{t_\text{в}}w^T(\tau,t)\left[\frac{\partial f(x,u,\tau)}{\partial u}\right]^T\psi(\tau)\,d\tau. \quad (2.68)$$

Тогда

$$\delta I=M\left\{\int_{t_0}^{t_\text{в}}dt\int_{t_0}^{t}d\tau\psi^T(t)\frac{\partial f(X,u,t)}{\partial u}\delta w(t,\tau)z(\tau)\right\}. \quad (2.69)$$

Рассматривая в качестве условия оптимальности равенство нулю вариации функционала (2.69), получаем для произвольной вариации $\delta w(t,\tau)$

$$M\left\{\left[\frac{\partial f(X,u,\xi,t)}{\partial u}\right]^T\psi(t)z^T(\tau)\right\}=0;\quad t_0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant t_\text{в}, \quad (2.70)$$

или обозначив

$$H(\psi,X,u,t)=\psi^T(t)\cdot f(X,u,\xi,t), \quad (2.71)$$

получим необходимое условие оптимальности линейного оператора управления $w(t,\tau)$ в компактной форме

$$M\left[\frac{\partial H(\psi,X,u,t)}{\partial u}\times z^T(\tau)\right]=0;\quad t_0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant t_\text{в}, \quad (2.72)$$

где $\psi(t)$ определяется системой интегродифференциальных уравнений (2.68).

Для сравнения отметим, что для произвольного оператора управления условия оптимальности при определении $u(t)$ в открытой области следуют непосредственно из соотношения (2.30) и имеют вид

$$M\left[\frac{\partial H(X,\ u,\ \psi,t)}{\partial u}\Bigg|_{z_{t_0}^{*}}^{t}\right]=0;\ t_0\leqslant t\leqslant t_{\text{в}},\qquad(2.73)$$

где вектор-функция $\psi(t)$ определяется системой дифференциальных уравнений (2.34).

Задача 2. *Условия оптимальности линейного стационарного оператора управления нелинейным объектом*

Отличие этой задачи от предыдущей состоит в том, что ядро оператора управления $w(\tau)$ в выражении (2.57) является функцией одной переменной и может быть реализовано звеньями с постоянными параметрами.

Поэтому вариация $\delta w(\tau)$ также будет функцией одной переменной

$$\delta u(t)=\int_0^{t-t_0}[\delta w(\tau)\,z\,(t-\tau)+w(\tau)\,C\delta x\,(t-\tau)]\,d\tau.\qquad(2.74)$$

Если аналогично предыдущему потребовать, чтобы $\psi(t)$ удовлетворяла системе уравнений

$$\frac{d\psi}{dt}=-\left[\frac{\partial f\ (X,\ u,\ t)}{\partial x}\right]^T\psi(t)-C^T\int_t^{t_{\text{в}}}w^T(\tau-t)\times$$
$$\times\left[\frac{\partial f\ (X,\ u,\ \tau)}{\partial u}\right]^T\psi(\tau)\,d\tau\qquad(2.75)$$

с конечными условиями (2.67), вариация функционала I будет определяться выражением

$$\delta I=M\left\{\int_{t_0}^{t_{\text{в}}}dt\int_0^{t-t_0}d\tau\psi^T(t)\frac{\partial f\ (X,\ u,\ t)}{\partial u}\,\delta w(\tau)\,z\,(t-\tau).\right.\qquad(2.76)$$

При произвольной вариации $\delta w(\tau)$ получим необходимое условие оптимальности $w(\tau)$ в виде системы $r \times l$ уравнений

$$M\left\{\int_{\tau+t_0}^{t_{\text{в}}}\left[\frac{\partial H(X, u, \psi, t)}{\partial u}\right]^T z^T(t-\tau)\,dt\right\}=0;$$
$$0 \leqslant \tau \leqslant t_{\text{в}}-t_0, \qquad (2.77)$$

где $\frac{\partial H}{\partial u}$ вектор-строка размерности $(1 \times r)$.

Трудности использования условий (2.72) и (2.77) состоят в решении интегродифференциальных уравнений (2.68) и (2.75) для определения $\psi(t)$.

Задача 3. *Условия оптимальности линейного оператора управления линейным объектом*

Пусть система уравнений (2.2) является линейной

$$\dot{x}=Ax+B_u u+B_v v+\xi(t); \quad x(t_0)=x^{\circ}, \qquad (2.78)$$

где матрицы A, B_u, B_v определены в (2.10), а воздействие $v(t)$ имеет известные статистические характеристики. Введем матрицу импульсных переходных функций $K(t, \tau)$ объекта размерности $(n \times n)$. По определению она удовлетворяет дифференциальному уравнению при $t \geqslant \tau$:

$$\frac{dK(t, \tau)}{dt}=AK(t, \tau), \quad K(\tau, \tau)=E, \qquad (2.79)$$

где E — единичная матрица $(n \times n)$. При этом $x(t)$ определяется выражением

$$x(t)=K(t, t_0)x^{\circ}+\int_{t_0}^{t} K(t, \tau)[B_u u(\tau)+B_v v(\tau)+$$
$$+\xi(\tau)]\,d\tau. \qquad (2.80)$$

Если привести воздействие ко входу оператора управления в виде сигнала $y(t)$, то схема на рис. 2.1 может быть преобразована к виду, представленному на рис. 2.2, где

$$y(t)=n(t)+CK(t, t_0)x^{\circ}+C\int_{t_0}^{t} K(t, \tau)\times$$
$$\times[B_v v(\tau+\xi(\tau)]\,d\tau. \qquad (2.81)$$

Обозначим далее через $Q(t, \tau)$ матрицу импульсных переходных функций размерности $(r \times l)$ замкнутой системы рис. 2.2 с входом в точке приложения $y(t)$ и вы-

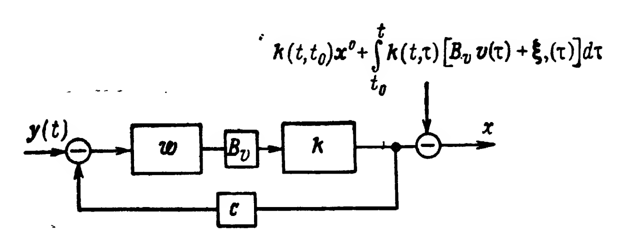


Рис. 2.2. Приведенная схема системы управления

ходом $u(t)$. Точка $Q(t, \tau)$ удовлетворяет уравнению, которое в компактной форме может быть записано в виде

$$Q = w + w \otimes CKB \otimes Q, \qquad (2.82)$$

где с помощью знака $\otimes$ записано выражение свертки операторов. Например:

$$a \otimes b = \int_{\tau}^{t} a(t, \lambda) b(\lambda, \tau) d\lambda.$$

При этом вариация управления равна

$$\delta u(t) = \int_{t_0}^{t} \delta Q(t, \tau) y(\tau) d\tau, \qquad (2.83)$$

поскольку в отличие от выражения (2.66) $y(t)$ является внешним воздействием.

Если оператор управления нестационарный (2.56), то вариации $\delta Q(t, \tau)$ — произвольные функции. В этом случае, записывая выражение для вариации функционала в виде (2.63), подставляя выражения (2.83) и определяя вектор-функцию $\psi(t)$ системой уравнений

$$\frac{d\psi}{dt} = -\left[\frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial x}\right]^T \qquad (2.84)$$

с начальными условиями (2.67), получим необходимое условие оптимальности $w(t, \tau)$:

$$M\left\{\left[\frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial u}\right]^T y^T(\tau)\right\} = 0; \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_в. \qquad (2.85)$$

Выражение для гамильтониана H может быть получено из условий (2.81) и (2.78):

$$H(\boldsymbol{x}, \psi, \boldsymbol{u}, t)=\psi_0 f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)+\boldsymbol{\psi}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{v}+\xi). \tag{2.86}$$

Задача 4. *Условия оптимальности линейного стационарного оператора управления линейным объектом*

Предположим, что объект управления описывается системой уравнений (2.78), где матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_u$, $\boldsymbol{B}_v$ зависят от времени, а оператор управления линейный и стационарный (2.57).

Особенностью этой задачи является зависимость вариаций $\delta\boldsymbol{Q}(t, \tau)$ при варьировании $\delta\boldsymbol{w}(\tau)$, так как последняя представляет собой функцию одной переменной. Для установления связи между вариациями $\delta\boldsymbol{Q}$ и $\delta\boldsymbol{w}$ рассмотрим схему на рис. 2.2. Для обратной матрицы импульсных переходных функций $Q^{-1}(t, \tau)$, которая определяется уравнением [16]:

$$\boldsymbol{Q}\otimes\boldsymbol{Q}^{-1}=E\delta, \tag{2.87}$$

где $\delta=\delta(t-\tau)$ — дельта-функция, имеем

$$\boldsymbol{Q}^{-1}(t, \tau)=\boldsymbol{w}^{-1}(t-\tau)+\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}(t, \tau)\boldsymbol{B}. \tag{2.88}$$

Из (2.87) можно выразить вариацию обратной функции $\delta\boldsymbol{Q}^{-1}(t, \tau)$ через вариацию $\delta\boldsymbol{Q}(t, \tau)$. Пренебрегая сверткой вариаций $\delta\boldsymbol{Q}^{-1}\otimes\delta\boldsymbol{Q}$ как бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $\delta\boldsymbol{Q}$, получаем

$$\delta\boldsymbol{Q}^{-1}=-\boldsymbol{Q}^{-1}\otimes\delta\boldsymbol{Q}\otimes\boldsymbol{Q}^{-1}. \tag{2.89}$$

Аналогично для вариации $\delta\boldsymbol{w}^{-1}$ имеем

$$\delta\boldsymbol{w}^{-1}=-\boldsymbol{w}^{-1}\otimes\delta\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{w}^{-1}. \tag{2.90}$$

Поскольку $\boldsymbol{w}(\tau)$ является стационарным оператором, $\delta\boldsymbol{w}^{-1}$ в (2.90) также будет стационарным, т. е. функцией одной переменной.

Определяя далее δQ^{-1} из (2.88), получим окончательно с помощью уравнений (2.89) и (2.90)

$$\delta\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\otimes\delta\boldsymbol{w}^*\otimes\boldsymbol{Q}, \tag{2.91}$$

где $\delta\boldsymbol{w}^*$ — вариация стационарного оператора.

Выражение (2.91) определяет класс вариаций импульсной переходной функции системы (см. рис. 2.2), как функции двух переменных t и τ при изменении стационарного оператора управления, импульсная переходная функция $w(\tau)$ которого является функцией одной переменной. Оно может быть использовано для определения вариации $\delta u(t)$. Поступая далее аналогично задаче 3, получим необходимое условие оптимальности $w(\tau)$ в виде уравнения

$$\int_{t_0+\theta}^{t_в} dt \int_{t_0}^{t-\theta} d\tau M\left[y(\tau) \frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial u} \right] \int_{\theta+\tau}^{t} d\lambda Q(t, \lambda) \times$$

$$\times Q^T(\lambda-\theta, \tau) = 0; \quad 0 \leqslant \theta \leqslant t_в - t_0. \tag{2.92}$$

Здесь $H(\psi, x, u, t)$ определяется выражением (2.86), $\psi(t)$ удовлетворяет системе уравнений (2.84).

Задача 5. *Условия оптимальности линейного стационарного оператора управления линейным стационарным объектом*

В этой задаче предполагается, что w является функцией одной переменной, а матрицы A и B_u в уравнении объекта (2.78), как и матрица C в измеряемом векторе z (2.58), постоянны.

При этих условиях замкнутая система, изображенная на рис. 2.2, будет описываться стационарным линейным оператором, т. е. Q является функцией одной переменной и ее вариации при изменении $w(\tau)$ независимы. Поэтому

$$\delta u(t) = \int_0^{t-t_0} \delta Q(\tau) y(t-\tau) d\tau \tag{2.93}$$

и условия оптимальности получаются аналогично задаче 3 в виде системы $(r \times l)$ уравнений

$$M\left\{ \int_{\tau+t_0}^{t_в} \left[\frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial u} \right]^T y^T(t-\tau) dt \right\} = 0;$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant t_в - t_0, \tag{2.94}$$

где H определено выражением (2.86), а $y(t)$ выражением (2.81). Условие оптимальности в стационарном слу-

чае (2.94) иногда удобно записывать, придавая вариацию матрице импульсных переходных функций Q_1 замкнутой системы (рис. 2.2) со входом $y(t)$ и выходом объекта $K(t-\tau)$. Согласно рис. 2.2

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} Q_1(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau+g(t), \tag{2.95}$$

где

$$g(t)=K(t-t_0)x^{\circ}+\int_{t_0}^{t} K(t-\tau)[B_v v(\tau)+\xi(\tau)]\,d\tau. \tag{2.96}$$

Полагая $B=E$ и $r=n$, где E — единичная матрица размерности $(n\times n)$, получим связь между $Q(\tau)$ и $Q_1(\tau)$ в виде

$$Q(\tau)=\int_{0}^{\tau} K^{-1}(\tau-\theta)\,Q_1(\theta)\,d\theta. \tag{2.97}$$

Условие оптимальности Q_1 может быть получено заменой вариации δQ на вариацию δQ_1 из (2.97) и имеет вид

$$M\left\{\int_{t_0+\theta}^{t_в} dt \int_{\theta}^{t-t_0} d\tau K^{-1T}(\tau-\theta)\left[\frac{\partial H(x,\,\psi,\,u,\,t)}{\partial u}\right]^T y^T(t-\tau)\right\}=0,$$

$$0\leqslant\theta\leqslant t_в-t_0, \tag{2.98}$$

где $K^{-1}(\tau-\theta)$ — обратная матрица импульсных переходных функций объекта. Управление $u(t)$ через функцию Q_1 определяется выражением

$$u(t)=\int_{0}^{t-t_0} d\mu \int_{t_0}^{t-\mu} K^{-1}(t-\lambda-\mu)\,Q_1(\mu)\,y(\lambda)\,d\lambda. \tag{2.99}$$

В связи с тем, что система телеуправления часто может быть приведена к стационарной системе, рассмотрим частные случаи полученного условия (2.98).

Если время наведения $t_в-t_0$ много больше времени переходного процесса по координатам x, можно считать, что система в момент $t_в$ находится в установившемся со-

стоянии и положить $t_0=-\infty$. В этом случае условие (2.97) примет вид

$$M\left\{\int_{-\infty}^{t_в} dt \int_{\theta}^{\infty} d\tau K^{-1T}(\tau-\theta)\left[\frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial u}\right]^T y^T(t-\tau)\right\}=0. \tag{2.100}$$

Для квадратичной функции потерь имеем

$$F[x(t_в)]=x^T(t_в)Px(t_в) \tag{2.101}$$

и

$$f_0(x, u, t)=u^T \varrho u, \tag{2.102}$$

где P — симметричная неотрицательная постоянная матрица размерности $(n\times n)$, а ϱ — положительно определенная симметричная матрица $(r\times r)$. Условие (2.100) может быть сведено к многомерному уравнению Винера-Хопфа [17] для задачи Ньютона с учетом ограничения дисперсии управления.

Для функции H уравнения (2.84) относительно $\psi(t)$ можно записать в виде

$$\frac{d\psi}{dt}=-A^T\psi \tag{2.103}$$

с конечными условиями

$$\psi(t_в)=-2Px(t_в). \tag{2.104}$$

Решение этой системы уравнений, которая является сопряженной системе (2.100), можно записать в виде

$$\psi_0=-1;$$

$$\psi(t)=-2K^T(t_в, t)Px(t_в). \tag{2.105}$$

При этом

$$\left[\frac{\partial H}{\partial u}\right]^T=-2u^T\varrho-2x(t_в)PK(t_в, t), \tag{2.106}$$

где $\left[\frac{\partial H}{\partial u}\right]^T$ — вектор-строка размерности $(1\times n)$. Если процессы $y(t)$ и $g(t)$ (2.81) и (2.96) стационарны и стационарно связаны и

$$\varrho(t)=E\frac{\psi_{n+2}}{t_в-t_0}, \quad \psi_{n+2}\text{—скаляр}, \tag{2.107}$$

то условие (2.100) при $t_0 \to \infty$ простыми преобразованиями может быть приведено к виду уравнения Ньютона [13], откуда получаем:

$$\boldsymbol{P}\int_0^\infty \boldsymbol{Q}_1(\tau)\boldsymbol{R}_y(\theta-\tau)\,d\tau+\boldsymbol{R}_{gy}(\theta)+$$

$$+\psi_{n+2}\int_0^\infty d\tau\int_0^\infty d\mu\int_0^\infty d\lambda\,[k^{-1T}(\tau)\,k^{-1}(\lambda)\,\boldsymbol{Q}_1(\mu)\,\boldsymbol{R}_y(\theta+\tau-\mu-\lambda)],$$

$$0\leqslant\theta<\infty, \qquad (2.108)$$

где $\boldsymbol{R}_y$ и $\boldsymbol{R}_{gy}$ — корреляционная матрица $\boldsymbol{y}(t)$ и взаимная корреляционная матрица процессов $\boldsymbol{y}(t)$ и $\boldsymbol{g}(t)$. По определению

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_y(\theta)&=M\,[\boldsymbol{y}(t)\,\boldsymbol{y}^T(t-\theta)],\\ \boldsymbol{R}_{gy}(\theta)&=M\,[\boldsymbol{g}(t)\,\boldsymbol{y}^T(t-\theta)].\end{aligned} \qquad (2.109)$$

Задача 6. *Условия оптимальности в линейной стационарной системе с конечной памятью*

Для системы с конечной памятью T [16] на интервале времени $t - t_0$, большем памяти системы,

$$\boldsymbol{u}(t)=\int_0^T \boldsymbol{Q}(\tau)\,\boldsymbol{y}(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.110)$$

и

$$\boldsymbol{x}(t)=\int_0^T \boldsymbol{Q}_1(\tau)\,\boldsymbol{y}(t-\tau)\,d\tau+\boldsymbol{g}(t), \qquad (2.111)$$

где $\boldsymbol{Q}(\tau)$ и $\boldsymbol{Q}_1(\tau)$ — матрицы импульсных переходных функций, определенные выше и связанные между собой соотношением (2.97).

Преимущества систем с конечной памятью состоят в возможности задания времени переходного процесса с помощью памяти T и необходимостью статистического описания воздействий лишь на конечном интервале времени, равном памяти системы.

Обычно на интервале памяти системы $(t,\ t-T)$ воздействие $\boldsymbol{g}(t)$ (2.96) при $\xi(t)=0$ может быть представлено конечным отрезком ряда, являющегося разложением $\boldsymbol{g}(t)$ по системе ортогональных функций [16]. В частности,

предположим, что $g(t)$ может быть представлено полиномом степени m:

$$g(t)=\sum_{i=1}^{m} A_i t^i. \tag{2.112}$$

Поскольку

$$y(t)=n(t)+Cg(t), \tag{2.113}$$

то

$$x(t)=\sum_{i=1}^{m}\int_0^T Q_1(\tau)CA_i(t-\tau)^i d\tau+\sum_{i=1}^{m} A_i t^i+$$
$$+\int_0^T Q_1(\tau)n(t-\tau)d\tau. \tag{2.114}$$

Из (2.114) следует, что по отношению к измеряемым компонентам $g(t)$ на $Q_1(\tau)$ может быть наложено условие несмещенности, состоящее в том, что система $Q_1(\tau)$ осуществляет заданное преобразование сигнала $g(t)$ с нулевой или заданной ошибкой. При этом на компоненты матрицы Q_1 накладываются условия вида

$$\int_0^T Q_{1ij}(\tau)\tau^k d\tau=C_{ij}^k, \tag{2.115}$$

где C_{ij}^k специально подобранные постоянные. Условия (2.115) обычно называют моментными условиями, а значения C_{ij}^k определяют величину динамической ошибки.

Задача оптимизации системы при условиях (2.115) сводится к обеспечению минимума функции от случайной составляющей $x(t)$

$$x(t)=\int_0^T Q_1(\tau)n(t-\tau)d\tau \tag{2.116}$$

при $\xi(t)=0$. Поскольку в этом случае динамическая составляющая управления $u(t)$ определена, ограничение на управление состоит в обеспечении пределов статистических характеристик составляющей управления, определяемой $n(t)$:

$$u(t)=\int_0^T Q(\tau)n(t-\tau)d\tau. \tag{2.117}$$

В этих условиях при стационарном случайном процессе ограничение на управление для функции f_0 (2.102) и ϱ (2.107) эквивалентно ограничению дисперсии управления. Например, в одномерном случае оно имеет вид

$$M[u^2(t)] \leqslant C_u. \tag{2.118}$$

Таким образом, для стационарной системы с конечной памятью задача оптимизации сводится к определению импульсной переходной функции $Q_1(\tau)$, удовлетворяющей моментным условиям (2.115) и обеспечивающей минимальную среднюю величину

$$I = M\{F[x(t)]\} \tag{2.119}$$

при $t - t_0 \geqslant T$ и условии, что управление имеет ограниченную дисперсию, которая в одномерном случае определяется по выражению (2.118).

Эта задача (при $n=r=l=1$) сводится к минимизации функционала, когда $t - t_0 \geqslant T$:

$$I = M\{F[x(t)] + u^2(t)\} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left[\int_0^T Q_1(\tau)\, \tau^k d\tau - C^k \right]. \tag{2.120}$$

Придавая $Q_1(\tau)$ вариацию δQ_1 и учитывая связь между Q_1 и Q (2.97), получим условие оптимальности системы в виде

$$M\left\{\frac{\partial F[x]}{\partial x} y_{cx}(t-\theta)\right\} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \tau^k + 2\psi_{n+2} \int_0^T Q_1(\mu)\, d\mu \times \tag{2.121}$$
$$\times \int_0^{T-\mu} d\lambda \int_0^{T-\theta} d\nu k^{-1}(\nu) k^{-1}(\lambda) R_y(t-\lambda-\mu,\; t-\theta-\nu) = 0$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant T$$

Здесь ψ_{n+2} постоянная величина, введенная в (2.107), которая может рассматриваться как множитель Лагранжа, определяемый из условия (2.118); λ_k, $k=1, 2, \ldots, m$ множители Лагранжа, определяемые из моментных условий (2.115). Если $\xi(t) = 0$, то

$$y_{cx}(t) = n(t) + c\xi(t) \tag{2.122}$$

совпадает с $n(t)$ и

$$R_y(t-\lambda-\mu,\; t-\theta-\nu) = N^2 \delta(\theta-\mu-\lambda+\nu). \tag{2.123}$$

Поскольку $x(t)$ связан с $y(t)$ линейным преобразованием, то для нормально распределенного воздействия $y(t)$ выходной сигнал системы Q_1 также будет нормальным. Легко показать, что в этом случае для четной функции $F[x]$ будет оптимальной импульсная переходная функция Q_1, обеспечивающая минимум среднего квадрата $x(t)$:

$$I = M[x^2(t)]. \tag{2.124}$$

Действительно, по определению двумерной плотности вероятности $p(x, y)$

$$M\left[\frac{\partial F}{\partial x} y\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial x} p(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y p(y/x) dy. \tag{2.125}$$

Как известно [14], для нормального закона распределения

$$\int_{-\infty}^{\infty} y p(y/x) dy = \frac{R_{xy}}{D_x} x, \tag{2.126}$$

где R_{xy} — взаимная корреляционная функция процессов y и x; D_x — дисперсия $x(t)$.

Подставляя (2.126) в (2.125), получаем

$$M\left[\frac{\partial F}{\partial x} y\right] = \lambda_0 R_{xy}, \tag{2.127}$$

где λ_0 — постоянная величина (так как x и y стационарны), равная

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial x} x p(x) dx = \lambda_0. \tag{2.128}$$

Таким образом, для нормального закона распределения

$$M\left[\frac{\partial F(x(t))}{\partial x} y_{\text{сл}}(t-\theta)\right] = \lambda_0 M[x(t) y(t-\theta)], \tag{2.129}$$

что эквивалентно рассмотрению в качестве критерия оптимизации

$$F(x) = x^2. \tag{2.130}$$

Подставляя в (2.129) выражение

$$x(t)=\int_0^T Q_1(\tau)\,y_{сл}(t-\tau)\,d\tau, \qquad (2.131)$$

получаем

$$M\left[\frac{\partial F[x]}{\partial x(t)}\,y_{сл}(t-\theta)\right]=\lambda_0\int_0^T Q_1(\tau)\,R_y(t-\tau,\ t-\theta)\,d\tau. \qquad (2.132)$$

Множитель λ_0 в (2.121) может быть исключен из рассмотрения, поскольку λ_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ и ψ_{n+2} произвольные.

В частном случае, когда импульсная переходная функция объекта $k(\tau)$ определяется уравнением

$$L(p)\,k(\tau)=\delta(\tau), \quad p=\frac{d}{d\tau}, \qquad (2.133)$$

где $L(p)$ — полиноминальный оператор от p степени n

$$L(p)=\sum_{l=0}^{n} a_l p^l \qquad (2.134)$$

условие оптимальности (2.121) с учетом (2.123) сводится к дифференциальному уравнению

$$L(p)\,L(-p)\,Q_1(\theta)+\psi_{n+2}Q_1(\theta)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\theta^k=0, \qquad (2.135)$$

$$0\leqslant\theta\leqslant T$$

где ψ_{n+2}, λ_k — постоянные, определяемые из условий (2.118) и (2.115).

Поскольку $Q_1(\theta)$ соответствует системе с конечной памятью T, то

$$Q_1(\theta)=0, \quad 0>\theta>T. \qquad (2.136)$$

Для объекта (2.133)

$$Q(\theta)=L(p)\,Q_1(\theta), \quad p=\frac{d}{d\theta}, \qquad (2.137)$$

поэтому при ограниченной дисперсии управления (2.118) и белом шуме $y_{сл}(t)$, $Q(\theta)$ не может содержать δ-функ-

ций и их производных. В соответствии с этим условием и (2.137) $Q_1(\theta)$ должна иметь непрерывные производные до $n-1$ в интервале $0 \leqslant \theta \leqslant T$, включая граничные точки. Так как $Q_1(\theta)$ тождественно равна нулю вне интервала $(0, T)$, то равны нулю и все ее производные до $n-1$ в точках $\theta=0$ и $\theta=T$. Поэтому уравнение (2.135) должно решаться при граничных условиях

$$Q_1^{(i)}(T)=Q_1^{(i)}(0)=0, \quad i=0,\ 1 \ldots n-1. \quad (2.138)$$

При постоянных коэффициентах оператора $L(p)$ решение уравнения (2.135) может быть записано в виде

$$Q_1(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[B_i e^{\alpha_i\theta}+B_i' e^{-\alpha_i\theta}]+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\theta^k, \quad (2.139)$$

где α_i — корни самосопряженного дифференциального уравнения

$$L(\alpha)L(-\alpha)+\psi_{n+2}=0, \quad (2.140)$$

а постоянные B_i и B_i' определяются из условий (2.138), которые приводятся к системе $2n$ уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^k\,[B_i e^{\alpha_i T}+(-1)^k B_i' e^{-\alpha_i T}]=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^k[B_i+(-1)^k B_i']=0. \quad (2.141)$$

$$k=0,\ 1,\ldots\ n.$$

Дисперсия сигнала $x(t)$ определяется по формуле

$$D=\int_0^T Q_1(\tau)\,d\tau\int_0^T Q_1(\theta)R_y(\tau-\theta)\,d\theta, \quad (2.142)$$

которая с учетом условия оптимальности (2.121) может быть приведена к виду

$$D=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k C^k+\psi_{n+2}M\,[u^2(t)]. \quad (2.143)$$

Согласно предыдущему параграфу при $\psi_{n+2} \neq 0$ в условии (2.118) имеет место знак равенства и

$$D = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k C^k + \psi_{n+2} C_u. \qquad (2.144)$$

Поскольку, как было показано, $\psi_{n+2} < 0$, то дисперсия ошибки x убывает с увеличением C_u.

2.5. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ ЦЕЛИ

Как указывалось выше, задача наведения с учетом противодействия цели может рассматриваться как задача теории игр, в которой цель выбирает управление $\boldsymbol{v}$ объектом (2.2) таким образом, чтобы обеспечить максимальное значение

$$I = M\{F[\boldsymbol{x}(t_\text{в})]\} \qquad (2.145)$$

в то время как наводящийся объект стремится его минимизировать. Управления $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ в общем случае удовлетворяют как «жестким» ограничениям, состоящим в замкнутости областей их возможных значений

$$\boldsymbol{u} \in U \qquad (2.146)$$

и

$$\boldsymbol{v} \in V, \qquad (2.147)$$

так и изопериметрическим вида

$$M\left[\int_{t_0}^{t_\text{в}} \boldsymbol{u}^T \varrho_u \boldsymbol{u} dt\right] \leqslant c_u; \qquad (2.148)$$

$$M\left[\int_{t_0}^{t_\text{в}} \boldsymbol{v}^T \varrho_v \boldsymbol{v} dt\right] \leqslant c_v. \qquad (2.149)$$

Существенной особенностью рассматриваемой игровой задачи является ограниченность информации о векторе фазовых координат $\boldsymbol{x}$, которой располагают наводящийся объект и цель. В частности, предположим, что наводящийся объект использует при наведении измерения

$$\boldsymbol{z}_u = f_u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}_u), \qquad (2.150)$$

а цель — измерения

$$\boldsymbol{z}_v = f_v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}_v), \qquad (2.151)$$

где n_u, n_v — ошибки измерений, являющиеся случайными функциями с известными обоим «игрокам» статистическими характеристиками. Предположим также, что обоим «игрокам» известны статистические характеристики начальных значений вектора фазовых координат $x(t_0)$, постоянные c_u, c_v и области U и V.

Различие информации, используемой «игроками» при управлении, определяет особенность рассматриваемой игры, как игры с ненулевой суммой [2]. Обозначим через $u_0(z_u, t)$ и $v_0(z_v, t)$ оптимальные стратегии «игроков». Тогда $u_0(z_u, t)$ минимизирует функционал (2.145) при условиях (2.146), (2.148) и замене оператора безусловного математического ожидания в этих выражениях условным при заданном z_u, т. е.

$$\min_{u \in U} M\{F[x(t_в)]|_{z_u}\} = \min_{u \in U} M[I_u(u, v_0, x, t)|_{z_u}] \quad (2.152)$$

при условии

$$M\left\{\int_{t_0}^{t_в} u^T Q_u u dt|_{z_u}\right\} \leqslant c_u. \quad (2.153)$$

Оптмальное управление v_0 определяется аналогично

$$\max_{v \in V} M\{F[x(t_в)]|_{z_v}\} = \max_{v \in V} M[I_u(x, u_0, v, t)|_{z_v}] \quad (2.154)$$

при условии

$$M\left\{\int_{t_0}^{t_в} v^T Q_v v dt|_{z_v}\right\} \leqslant c_v. \quad (2.155)$$

Поскольку MI_u и MI_v в общем случае различны, то игра будет иметь ненулевую сумму. Условия (2.152) и (2.154) образуют систему функционалов и должны решаться одновременно относительно u_0 и v_0. Зависимость u_0 и v_0 от измеряемых векторов z_u и z_v вызывает существенные трудности при оптимизации управления и составляет особенность рассматриваемой игры, как игры с неполной информацией.

В более общем случае критерий игры может быть записан в виде

$$I = M\{F[x(t_в)] + \int_{t_0}^{t_в} f_0[x, u, v, t]dt\}. \quad (2.156)$$

На основании задачи 2 условия оптимальности управлений игроков $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}_u, t)$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z}_v, t)$ для функционала (2.156) могут быть записаны с помощью стохастического принципа максимума в виде системы уравнений:

$$\max_{\boldsymbol{u}\in U} M\left\{H[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{z}_v, t), t]\Big|_{z_u \, * \, t_0}^{t}\right\}=0; \qquad (2.157)$$

$$\min_{\boldsymbol{v}\in V} M\left\{H[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{z}_u, t), t]\Big|_{z_v \, * \, t_0}^{t}\right\}=0, \qquad (2.158)$$

где

$$H[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, t]=-f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, t)+\psi^T f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, t). \qquad (2.159)$$

Система уравнений относительно $\psi(t)$

$$\frac{d\psi_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (2.160)$$

интегрируется при граничных условиях

$$\psi_i(t_в)=-\frac{\partial F[\boldsymbol{x}(t_в)]}{\partial x_i}, \quad i=1, 2\ldots n. \qquad (2.161)$$

В случае линейного объекта (2.2)

$$\left.\begin{array}{c}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{v}+\xi(t);\\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}^{\circ}\end{array}\right\} \qquad (2.162)$$

и квадратичного критерия качества

$$f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, t)=\psi_{n+2}^{u}\boldsymbol{u}^T Q_u \boldsymbol{u}+\psi_{n+2}^{v}\boldsymbol{v}^T Q_v \boldsymbol{v}. \qquad (2.163)$$

Здесь Q_u, Q_v — положительно-определенная и отрицательно-определенная матрицы соответственно;

ψ_{n+2}^{u} и ψ_{n+2}^{v} — постоянные коэффициенты.

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, t)=-\psi_{n+2}^{u}\boldsymbol{u}^T Q_u \boldsymbol{u}-\psi_{n+2}^{v}\boldsymbol{v}^T Q_v \boldsymbol{v}+ \qquad (2.164)$$
$$+\psi^T(t)[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{v}+\xi].$$

При этом условия оптимальности (2.157) и (2.158) становятся независимыми и управления «игроков» связаны между собой лишь через оценки конечного значения вектора фазовых координат $\boldsymbol{x}(t_в)$.

В частном случае $\boldsymbol{z}_u=\boldsymbol{z}_v=\boldsymbol{z}$ условия (2.157) и (2.158) совпадают. Это соответствует предположению о сущест-

вовании седловой точки в рассматриваемой игре при информации $z(t)$ и чистых стратегиях $\boldsymbol{u}(z, t)$ и $\boldsymbol{v}(z, t)$. Условия оптимальности в этом случае могут быть записаны в виде

$$\max_{u \in U} \min_{v \in V} M \left\{ H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \psi, t) \Big| z_{t_0}^{t} \right\} = \qquad (2.159)$$

$$= \min_{v \in V} \max_{u \in U} M \left\{ H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \psi, t) \Big| z_{t_0}^{t} \right\}.$$

Очевидно, что для линейного объекта, представленного в виде уравнения (2.162) и квадратичного критерия (2.163), условие (2.159) выполняется и игра имеет седловую точку.

Глава III

ОПТИМИЗАЦИЯ КОНТУРА ТЕЛЕНАВЕДЕНИЯ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ

3.1. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С УЧЕТОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОГРАНИЧЕНИЯ

Рассмотрим задачу управления линейным объектом

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Bu+\xi; \quad x(t_0)=x_0, \tag{3.1}$$

где x, u, ξ — векторы размерности $(n\times 1)$, $(r\times 1)$ и $(n\times 1)$ соответственно; A и B — зависящие от времени матрицы $(n\times n)$ и $(n\times r)$; $M[\xi(t)]=0$,

$$M[\xi(t_1)\xi^T(t_2)]=R_\xi(t_1, t_2)=S(t_1)\delta(t_1-t_2), \tag{3.2}$$

где $S(t_1)$ — матрица $(n\times n)$.

В системе телеуправления уравнение (3.1) описывает автономный контур и уравнение связи, $\xi(t)$ — ошибки передачи команд и возмущения, действующие на наводящийся объект.

Управление $u(t)$ осуществляется на основе наблюдений вектора $z(t)$ размерности $(l\times 1)$

$$z(t)=C(t)x(t)+n(t), \tag{3.3}$$

где C — переменная матрица $(l\times n)$, $M[n(t)]=0$,

$$M[n(t_1)n^T(t_2)]=N(t_1)\delta(t_1-t_2). \tag{3.4}$$

Предположим также, что x_0, $n(t)$ и $\xi(t)$ независимы и подчиняются нормальному закону распределения.

Управление $u(t)$ будем считать оптимальным, если оно минимизирует функционал

$$I=M[x^T(t_в)Px(t_в)] \tag{3.5}$$

и удовлетворяет ограничению

$$M\left[\int_{t_0}^{t_в} u^T(t)\varrho(t)u(t)dt\right] \leqslant c. \qquad (3.6)$$

Здесь P — положительная матрица $(n \times n)$, а $\varrho(t)$—положительно-определенная матрица $(r \times r)$.

Применим для определения управления метод стохастического принципа максимума, изложенный в гл. II.

Согласно (2.46)

$$H(x, \psi, u, t) = \psi^T(t)[Ax + Bu + \xi] + \psi_{n+2}u^T\varrho u. \qquad (3.7)$$

Постоянная величина ψ_{n+2} равна нулю, если оптимальное управление удовлетворяет условию (3.6) со знаком строгого неравенства, и $\psi_{n+2} < 0$, если определенное при $\psi_{n+2} = 0$ управление не удовлетворяет (3.6). В последнем случае ψ_{n+2} определяется из условия (3.6) со знаком равенства.

Согласно выражению (2.33)

$$\frac{d\psi}{dt} = -A^T\psi(t); \quad \psi(t_в) = -2P(t_в)x(t_в). \qquad (3.8)$$

Решение этого уравнения

$$\psi(t) = -2K^T(t_в, t)P(t_в)x(t_в), \qquad (3.9)$$

где $K(t_в, t)$ — матрица импульсных переходных функций уравнения (3.1):

$$\frac{dK(t, \tau)}{dt} = AK(t, \tau); \quad K(\tau, \tau) = E. \qquad (3.10)$$

Здесь E — единичная матрица $(n \times n)$.

Управление $u(t)$, максимизирующее условное математическое ожидание от уравнения (2.47), может быть определено из условия:

$$M\left[\frac{\partial H(x, u, \psi, t)}{\partial u}\bigg|_{z_{t_0}^{t*}}\right] = 0, \qquad (3.11)$$

поскольку область определения $u(t)$ не ограничена. Так как управление является функцией наблюдений $u = u(z_{t_0}^{t*}, t)$, то оно является неслучайным по отноше-

нию к математическому ожиданию в выражении (3.11). Выполняя дифференцирование, получим

$$u(t)=\frac{\rho^{-1}(t)}{\psi_{n+2}} B^T K^T(t_в, t) P(t_в) M\left[x(t_в)\Big|z_{t_0}^{t*}\right], \qquad (3.12)$$

где $\varrho^{-1}(t)$ — матрица, обратная $\varrho(t)$.

Из уравнения (3.12) следует, что оптимальное управление, минимизирующее функционал (3.5), пропорционально в каждый момент времени оценке значения координат в конечный момент управления на основе наблюдений до момента t реализации вектора $z(t)$.

Воспользовавшись уравнением (3.1), мы можем выразить оценку конечного значения фазовой координаты $x(t_в)$ через оценку ее текущего значения $x(t)$.

Используя определение матрицы импульсных переходных функций $K(t_в, t)$ из уравнения (3.10), запишем

$$x(t_в)=K(t_в, t)\,x(t)+\int_t^{t_в} K(t_в, \tau)[Bu(\tau)+\xi(\tau)]\,d\tau. \qquad (3.13)$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор условного математического ожидания и учитывая, что

$$M\left[\xi(\tau)\,|\,z_{t_0}^{t*}\right]=0, \quad \tau \geqslant t \qquad (3.14)$$

$$M\left[u(\tau)\,|\,z_{t_0}^{t*}\right]=G(t_в, \tau)\,M\left[x(t_в)\,|\,z_{t_0}^{t*}\right]; \quad \tau \geqslant t, \qquad (3.15)$$

где обозначено

$$G(t_в, \tau)=\frac{\rho^{-1}(\tau)}{\psi_{n+2}} B^T K^T(t_в, \tau) P(t_в), \qquad (3.16)$$

получим

$$M\left[x(t_в)\,|\,z_{t_0}^{t*}\right]=g^{-1}(t_в, t)\,K(t_в, t)\,M\left[x(t)\,|\,z_{t_0}^{t*}\right]. \qquad (3.17)$$

Здесь $g^{-1}(t_в, t)$ — матрица, обратная $g(t_в, t)$:

$$g(t_в, t)=E-\int_t^{t_в} K(t_в, \tau)\,BG(t_в, \tau)\,d\tau. \qquad (3.18)$$

Подставляя выражение (3.15) в уравнение (3.12) и учитывая соотношение (3.16), получим окончательно

$$u(t)=G(t_в, t)\,g^{-1}(t_в, t)\,K(t_в, t)\,M\left[x(t)\,|\,z_{t_0}^{t*}\right]. \qquad (3.19)$$

Таким образом, управление в каждый момент времени пропорционально оценке текущих фазовых координат объекта.

Постоянная $\psi_{n+2}<0$ определяется из условия (3.6), взятого со знаком равенства.

Пример 3.1. Пусть объект управления описывается системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt}=u+\zeta; \quad x_1(t_0)=x_{10};\\ &\frac{dx_2}{dt}=x_1; \quad x_2(t_0)=x_{20}. \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

Рассматриваемый случай соответствует контуру телеуправления, в котором автономный контур принят безынерционным, а уравнение связи является двойным интегрирующим звеном (см. 1.4).

Управление осуществляется на основе измерения линейного отклонения x_2:

$$z=x_2(t)+n(t)$$

В качестве критерия точности примем средний квадрат пролета в момент встречи

$$R(t_{\text{в}})=x_2(t_{\text{в}})+\Delta x_1(t_{\text{в}}), \quad \Delta=\text{const}\geqslant 0 \tag{3.21}$$

и в функционале (3.5) матрица будет иметь вид

$$P=\begin{vmatrix}\Delta^2 & \Delta\\ \Delta & 1\end{vmatrix}. \tag{3.22}$$

В качестве ограничения рассмотрим математическое ожидание интеграла от квадрата управления, что эквивалентно $\varrho=1$ в (3.6). Определим оптимальный закон управления $u(t)$.

В рассматриваемом случае $n=2$, $r=1$, $l=1$.

$$B=\begin{vmatrix}1\\ 0\end{vmatrix}, \quad K(t,\tau)=\begin{vmatrix}1(t-\tau) & 0\\ t-\tau & 1(t-\tau)\end{vmatrix}. \tag{3.23}$$

Из соотношения (3.16) $G(t_{\text{в}}, t)$ является вектором-строкой и равна

$$G(t_{\text{в}}, t)=\frac{t_{\text{в}}-t+\Delta}{\psi_u}\,|\,\Delta \;\; 1\,|. \tag{3.24}$$

Матрица $g(t_{\text{в}}, t)$ в соотношении (3.16) имеет вид

$$g(t_{\text{в}}, t)=\begin{vmatrix}1-\alpha_{11}\Delta & -\alpha_{11}\\ -\alpha_{21}\Delta & 1-\alpha_{21}\end{vmatrix}, \tag{3.25}$$

где

$$\alpha_{11}=\frac{t_{\text{в}}-t}{2\psi_4}(t_{\text{в}}-t+2\Delta), \tag{3.26}$$

$$\alpha_{21}=\frac{(t_{\text{в}}-t)^2}{6\psi_4}(2t_{\text{в}}-2t+3\Delta)+\frac{\Delta^2}{6}.$$

Обращая матрицу g, получаем

$$g^{-1}(t_{\text{в}}, t) = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1-\alpha_{21} & \alpha_{11} \\ \alpha_{21}\Delta & 1-\alpha_{11}\Delta \end{vmatrix}, \qquad (3.27)$$

где $$D = 1 - \alpha_{11}\Delta - \alpha_{21} = 1 - \frac{1}{3}[(t_{\text{в}} - t + \Delta)^3 - \Delta^3].$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (3.19) и перемножая матрицы, получим

$$u(t) = \frac{t_{\text{в}} - t + \Delta}{\psi_4 D}\left\{(t_{\text{в}} - t + \Delta)\, M\left[x_1(t)/z^{t}_{t_0^*}\right] + M\left[x_2(t)/z^{t}_{t_0^*}\right]\right. . \qquad (3.28)$$

При $\Delta=0$, что соответствует требованию минимума среднего квадрата линейного рассогласования в момент встречи, получим закон управления в виде

$$u(t) = \frac{t_{\text{в}} - t}{\psi_4}\left\{M\left[x_2(t)/z^{t}_{t_0^*}\right] + (t_{\text{в}} - t)\, M\left[x_1(t)/z^{t}_{t_0^*}\right]\right. . \qquad (3.29)$$

3. 2. ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТ ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА

Закон управления линейным объектом (3.1) зависит от математического ожидания текущих значений фазовых координат объекта, определяемого при условии известной реализации наблюдаемых величин z на предшествующем интервале времени (t_0^*, t). Получаемые в результате значения обычно называют оценками фазовых координат и определяют по формулам, полученным Р. Калманом [9].

Рассмотрим вывод уравнений (3.1) для оценок координат объекта, основанный на предположении нормальности условного закона распределения координат $x(t)$.

Пусть наблюдения вектора $z(t)$ производятся в дискретные моменты времени t_i, отстоящие друг от друга на время Δt, и в эти же моменты определяются оценки координат $x(t_i)$.

Обозначим

$$M[x(t_i) \mid z_0^i] = \hat{x}_i. \qquad (3.30)$$

На основании формулы Байеса

$$p(x_i \mid z_0^i) = k_x p(z_i \mid x_i,\ z_0^{i-1})\, p(x_i \mid z_0^{i-1}), \qquad (3.31)$$

где k_x — коэффициент, не зависящий от x_i и определяемый из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x_l/z_0^l)\, dx_l = 1. \qquad (3.32)$$

Закон распределения величин z_i при заданном x_i не зависит от прошлых значений z_0^{l-1}, так как n_i независимы, и может быть записан в виде многомерного нормального закона распределения величин n_i:

$$p(z_l \mid x_l, z_0^{l-1}) = p(z_l/x_l) =$$
$$= k_z \exp\left\{-\frac{1}{2}[z_l - C_l x_l]^T N_l^{-1} [z_l - C_l x_l]\right\}, \qquad (3.33)$$

где
$$N_l = \frac{N(t_l)}{\Delta t}.$$

Закон распределения величины x_i при наблюдениях величин $z_0^{l-1} = \{z_0, z_1, \ldots z_{l-1}\}$ является априорным на шаге i. Предполагая его нормальным с математическим ожиданием $\hat{x}_{ai}$ и дисперсионной матрицей R_{ai}, получим

$$p(x_l/z_0^{l-1}) = k_{xa} \exp\left\{-\frac{1}{2}[x_l - \hat{x}_{al}]^T R_{al}^{-1} [x_l - \hat{x}_{al}]\right\}. \qquad (3.34)$$

Апостериорный закон распределения $p(x_l/z_0^l)$ также является нормальным с математическим ожиданием $\hat{x}_i$ и дисперсионной матрицей R_l. Аналогично (3.34) имеем

$$p(x_l \mid z_0^l) = k_x \exp\left\{-\frac{1}{2}[x_l - \hat{x}_l]^T R_l^{-1} [x_l - \hat{x}_l]\right\}. \qquad (3.35)$$

Здесь k_x, k_{xa}, k_z — нормировочные коэффициенты, определяемые из условий, аналогичных выражению (3.32).

Подставляя выражения (3.33), (3.34) и (3.35) в уравнение (3.31) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x_i в левой и правой частях равенства, получим уравнения

$$\hat{x}_l = [R_{al}^{-1} + C_l^T N_l^{-1} C_l]^{-1} \cdot [C_l^T N_l^{-1} z_l + R_{al}^{-1} \hat{x}_{al}], \qquad (3.36)$$

$$R_l^{-1} = R_{al}^{-1} + C_l^T N_l^{-1} C_l. \qquad (3.37)$$

В дискретном случае уравнение (3.1) объекта может быть записано в виде

$$x_i=[E+A\Delta t]\,x_{i-1}+\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}[Bu(\tau)+\xi(\tau)]\,d\tau. \qquad (3.38)$$

Применяя к обеим частям уравнения (3.38) операцию условного математического ожидания при заданных значениях z_0^{i-1}, получим при условии, что $u(\tau)$, $t_{i-1}\leqslant\tau\leqslant t_i$ зависит только от z_0^{i-1} и не зависит от z_i,

$$\hat{x}_{ai}=[E+A\Delta t]\,\hat{x}_{i-1}+\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}Bu(\tau)\,d\tau. \qquad (3.39)$$

Подставляя уравнение (3.39) и (3.38) в выражение для априорной дисперсионной матрицы, получим

$$R_{ai}=[E+A\Delta t]\,R_{i-1}\,[E+A\Delta t]^T+S(t_i)\,\Delta t, \qquad (3.40)$$

где $S(t_i)$ определяется из уравнения (3.2).

Подставляя уравнения (3.39) и (3.40) в выражения (3.36) и (3.37), получим

$$\hat{x}_i=[E+A\Delta t]\,\hat{x}_{i-1}+\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}Bu\,d\tau+R_iC_i^TN_i^{-1}\times$$

$$\times\left\{z_i-C_i\left[(E+A\Delta t)\,\hat{x}_{i-1}+\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}Bu\,d\tau\right]\right\}, \qquad (3.41)$$

$$R_i=[E-R_iC_i^TN_i^{-1}C_i]\,\{[E+A\Delta t]\,R_{i-1}\,[E+A\Delta t]^T+$$
$$+S(t_i)\,\Delta t\}. \qquad (3.42)$$

Рекуррентные соотношения (3.41) и (3.42) определяют оценки $\hat{x}_i$ и дисперсионную матрицу оценок R_i в дискретном случае.

При $\Delta t\longrightarrow 0$ получим уравнения для оценок фазовых координат объекта в виде (3.1) в непрерывном случае

$$\frac{d\hat{x}}{dt}=A\hat{x}+Bu+RC^TN^{-1}\,[z(t)-C\hat{x}], \qquad (3.43)$$

$$\frac{dR}{dt}=AR+RA^T-RC^TN^{-1}CR+S. \qquad (3.44)$$

Начальными условиями этих уравнений являются математическое ожидание и дисперсия начальных значений фазовых координат объекта x_0.

Заметим, что уравнения (3.43) и (3.44) остаются в силе, если матрицы A или C являются функциями управления $u(t)$. Это позволяет включить в рассматриваемые задачи случаи мультипликативных помех в канале передачи команд $u(t)$ и зависимости измерений $z(t)$ от управления $u(t)$.

Пример 3.2. Получим уравнения для оценок фазовых координат объекта

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = u + \xi & x_1(t_0) = x_{10} \\ \dot{x}_2 = x_1 & x_2(t_0) = x_{20}, \end{array}\right\} \tag{3.45}$$

управление которым выбиралось в примере предыдущего параграфа. Наблюдения, как и ранее, примем в виде

$$z = x_2 + n.$$

В рассматриваемом случае

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad C = |0 \quad 1|, \quad 'N^{-1} = \dfrac{1}{N}; \\ S = \begin{vmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad R = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}. \end{array}\right\} \tag{3.46}$$

Подставляя матрицы в уравнение (3.43), получим

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\hat{x}_1}{dt} = u + \dfrac{R_{12}}{N}(z - \hat{x}_2); \quad \hat{x}_1(t_0) = M[x_{10}]; \\ \dfrac{d\hat{x}_2}{dt} = \hat{x}_1 + \dfrac{R_{22}}{N}(z - \hat{x}_2); \quad \hat{x}_2(t_0) = M[x_{20}]. \end{array}\right\} \tag{3.47}$$

Элементы дисперсионной матрицы определяются уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dR_{11}}{dt} = -\dfrac{R_{12}^2}{N} + S; \quad R_{11}(t_0) = M[x_{10} - Mx_{10}]^2; \\ \dfrac{dR_{12}}{dt} = \dfrac{dR_{21}}{dt} = R_{11} - \dfrac{R_{22} - R_{12}}{N}; \\ R_{12}(t_0) = M[(x_{10} - Mx_{10})(x_{20} - Mx_{20})]; \\ \dfrac{dR_{22}}{dt} = 2R_{12} - \dfrac{R_{22}^2}{N}; \quad R_{22}(t_0) = M[x_{20} - Mx_{20}]^2. \end{array}\right\} \tag{3.48}$$

3.3. ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НЕФИКСИРОВАННОМ МОМЕНТЕ ВСТРЕЧИ

Предположим, что момент окончания процесса наведения (момент встречи $t_в$) является случайным с известной плотностью распределения $p(t_в)$. В этой задаче математическое ожидание в критерии

$$I = M\left[x^T(t_в) P(t_в) x(t_0) + \psi_{n+2} \int_{t_0}^{t_в} u^T \varrho u dt \right] \quad (3.49)$$

означает операцию усреднения по начальным условиям $x(t_0)$, возмущающим воздействиям $n(t)$ и $\xi(t)$ и моменту встречи $t_в$.

Если величина $t_в$ не зависит от x_0, n, ξ, то (3.49) можно записать в виде

$$I = M\left[\int_{t_0}^{T} p(t_в) x^T(t_в) P(t_в) x(t_в) dt_в + \right.$$

$$\left. + \psi_{n+2} \int_{t_0}^{T} p(t_в) dt_в \int_{t_0}^{t_в} u^T \varrho u dt \right], \quad (3.50)$$

где интервал (t_0, T) включает возможные значения $t_в$. Меняя порядок интегрирования во втором слагаемом и обозначая

$$P_1(t_в) = p(t_в) P(t_в), \quad \varrho_1(t) = \psi_{n+2} \varrho(t) \int_{t}^{T} p(t_в) dt_в, \quad (3.51)$$

приведем исходную задачу к задаче минимизации интегрального квадратического функционала вида

$$I = M\left\{ \int_{t_0}^{T} [x^T(t) P_1 x(t) + u^T(t) \varrho_1(t) u(t)] dt \right\}. \quad (3.52)$$

Эта задача может быть решена на основе применения стохастического принципа максимума (гл. II) при $F[x(t_в)]=0$ и

$$f_0(x, u, t) = x^T P_1 x + u^T \varrho_1 u. \quad (3.53)$$

Оптимальное управление по критерию (3.52) для объекта (3.1) определяется из условия максимума функции

$$\max_u M\left[H(\psi, x, u, t) \mid z_{t_0}^{t*} \right] = \max_u M[-x^T P_1 x -$$

$$\left. - u^T \varrho_1 u + \psi^T (Ax + Bu + \xi)] \mid z_{t_0}^{t*} \right]. \quad (3.54)$$

Сопряженная вектор-функция ψ определяется в рассматриваемом случае дифференциальным уравнением

$$\frac{d\psi}{dt} = -A^T\psi + 2P_1x \tag{3.55}$$

при конечных условиях

$$\psi(T) = 0. \tag{3.56}$$

Управление, максимизирующее уравнение (3.54) при положительно-определенной матрице ϱ_1, определяется выражением

$$u(t) = \frac{1}{2}\varrho_1^{-1}B^T M\left[\psi(t) \mid z_{t_0}^{t*}\right]. \tag{3.57}$$

Оценка значения решения сопряженной системы уравнений (3.55)

$$\hat{\psi}(t) = M\left[\psi(t) \mid z_{t_0}^{t*}\right] \tag{3.58}$$

может быть определена на основе метода фильтров Калмана.

Действительно, система n уравнений (3.55) вместе с системой (3.1) образуют систему $2n$ линейных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi}{dt} = -A^T\psi + 2P_1x; \quad \psi(T) = 0; \\ &\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + \xi; \quad x(t_0) = x_0. \end{aligned}\right\} \tag{3.59}$$

Эта система может быть записана в виде системы $2n$ уравнений

$$\frac{dy}{dt} = ay + bu + \zeta, \tag{3.60}$$

где

$$y = \begin{vmatrix} \psi \\ x \end{vmatrix}, \quad a = \begin{vmatrix} -A^T & 2P_1 \\ 0 & A \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ B \end{vmatrix}, \quad \zeta = \begin{vmatrix} 0 \\ \xi \end{vmatrix}$$

обозначают в блочном виде матрицы и векторы, составленные из соответствующих векторов и матриц системы (3.59). Через 0 обозначены блоки, содержащие нулевые элементы.

В соответствии с уравнением (3.43) имеем

$$\frac{d\hat{\psi}}{dt}=-A^T\hat{\psi}+2P_1\hat{x}+R_{\psi x}C^TN^{-1}(z-C\hat{x}); \quad \hat{\psi}(T)=0 \tag{3.61}$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt}=Ax+Bu+R_{xx}C^TN^{-1}(z-C\hat{x}); \quad \hat{x}(t_0)=\bar{x}_0,$$

где $R_{\psi x}$, R_{xx} — дисперсионные матрицы оценок. Легко показать, что

$$\hat{\psi}(t)=Q(t)\hat{x}, \quad Q(t)=0. \tag{3.62}$$

Для этого подставим уравнения (3.62), (3.57) в (3.61) и заметим, что

$$R_{\psi x}=QR_{xx}. \tag{3.63}$$

Полученная система уравнений может быть удовлетворена при произвольной $\hat{x}$ функцией $Q(t)$, являющейся решением уравнения Риккати вида

$$\frac{dQ}{dt}=2P_1-A^TQ-QA-\frac{1}{2}QB\varrho_1^{-1}B^TQ, \tag{3.64}$$

$$Q(T)=0.$$

Таким образом, при нефиксированном моменте встречи управление, минимизирующее функционал (3.49), определяется выражением

$$u(t)=\frac{1}{2}\varrho_1^{-1}B^TQ\hat{x}(t), \tag{3.65}$$

где ϱ_1 определяется выражением (3.51), Q является решением (3.64), а $\hat{x}$ — оценка текущих значений фазовых координат объекта.

Пример. 3.3. Рассмотрим задачу управления объектом (3.20) при условии, что момент встречи распределен по равномерному закону в интервале (t_0, T), т. е.

$$P(t_в)=\frac{1}{T-t_0}.$$

Для критерия (3.21), одномерного управления и $\varrho(t)=1$ из матрицы (3.22) и условия (3.56) получаем

$$P_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\Delta^2}{T-t_0} & \dfrac{\Delta}{T-t_0} \\ \dfrac{\Delta}{T-t_0} & \dfrac{1}{T-t_0} \end{vmatrix}; \quad \varrho_1(t) = \psi_4 \frac{T-t}{T-t_0}.$$

Элементы матрицы Q (2×2) на основании уравнения (3.64) для $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\frac{dQ_{11}}{dt} = \frac{2\Delta^2}{T-t_0} - Q_{21} - Q_{12} - \frac{T-t_0}{T-t}\frac{Q_{11}^2}{2\psi_4};$$

$$\frac{dQ_{12}}{dt} = \frac{2\Delta}{T-t_0} - Q_{22} - \frac{T-t_0}{T-t}\frac{Q_{11}Q_{12}}{2\psi_4};$$

$$\frac{dQ_{21}}{dt} = \frac{2\Delta}{T-t_0} - Q_{22} - \frac{T-t_0}{T-t}\frac{Q_{11}Q_{21}}{2\psi_4};$$

$$\frac{dQ_{22}}{dt} = \frac{2}{T-t_0} - \frac{1}{2\psi_4}\frac{T-t_0}{T-t} Q_{21}Q_{12};$$

при конечных условиях $Q_{ij}(T)=0$.

Управление $u(t)$ из уравнения (3.65) имеет вид

$$u(t) = -\frac{1}{2\psi_4}\frac{T-t_0}{T-t}\left[Q_{11}\hat{x}_1(t) + Q_{12}\hat{x}_2(t)\right],$$

где $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ определяются уравнениями (3. 47).

3. 4. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ЖЕСТКОМ ОГРАНИЧЕНИИ

Рассмотрим случай, когда управление линейным объектом с уравнением (3. 1)

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + \xi; \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.66}$$

не должно в каждой реализации превосходить заданных значений $U(t)$, например, для скалярного управления

$$|u(t)| \leqslant U(t), \quad U > 0. \tag{3.67}$$

Ограничение (3.67) в дальнейшем будем называть жестким ограничением. Физически это условие отражает наличие в системе нелинейного элемента типа ограничения.

Рассмотрим задачу определения скалярного управления u объектом, удовлетворяющего условию (3.67) и ми-

нимизирующего квадратическую форму значений фазовых координат в момент встречи:

$$I = M[\boldsymbol{x}^T(t_в) P \boldsymbol{x}(t_в)]. \tag{3.68}$$

Управление осуществляется, как и ранее, на основе измерения вектора z, определяемого выражением (3.3).

В этой задаче

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{u}, t) = \boldsymbol{\psi}^T[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\xi}], \tag{3.69}$$

где

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = -\boldsymbol{A}^т\boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\psi}(t_в) = -2\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t_в). \tag{3.70}$$

Управление определяется условием

$$\max_{|\boldsymbol{u}(t)| \leqslant U} M\left[H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{u}, t) | z_{t_0}^{t_*}\right] = 0. \tag{3.71}$$

Отсюда u максимизирует величину $\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{B}u$ и равно

$$\boldsymbol{u}(t) = U(t) \operatorname{sign} \boldsymbol{B}^T \hat{\boldsymbol{\psi}}(t), \tag{3.72}$$

где $\boldsymbol{B}(t)$ — вектор $(n \times 1)$; $\hat{\boldsymbol{\psi}}(t)$ — вектор — $(n \times 1)$ при $\boldsymbol{B}^T \hat{\boldsymbol{\psi}}(t)$ не равном нулю.

При

$$\boldsymbol{B}^T \hat{\boldsymbol{\psi}}(t) = 0 \tag{3.73}$$

управление не определяется из условия (3.71) и является особым по терминологии, принятой в детерминированных задачах.

Для определения оценок $\hat{\boldsymbol{\psi}}(t)$ и $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ аналогично (3.61) получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\hat{\boldsymbol{\psi}}}{dt} = -\boldsymbol{A}^T\hat{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{R}_{\psi x}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}), \ \hat{\boldsymbol{\psi}}(t_в) = \\
&\quad = -2\boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{x}}(t_в), \\
&\frac{d\hat{\boldsymbol{x}}}{dt} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}_{xx}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}) \\
&\quad \hat{\boldsymbol{x}}(t_0) = \hat{\boldsymbol{x}}_0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.74}$$

Здесь $\boldsymbol{R}_{\psi x}$ и $\boldsymbol{R}_{xx}$ — дисперсионные матрицы оценок, определяемые уравнением Риккати типа (3.44), и управление $u(t)$ определяется выражением (3.72).

Прежде всего отметим, что решение уравнения (3.70) имеет вид

$$\psi(t) = -2k^T(t_в, t)\,P(t_в)\,x(t_в), \qquad (3.75)$$

где $k^T(t_в, t)$ — матрица импульсных переходных функций, являющаяся решением матричного уравнения

$$\frac{dk^T(t_в, t)}{dt} = -A^T k^T(t_в, t), \quad k^T(t_в, t_в) = E. \qquad (3.76)$$

Таким образом, из выражений (3.72) и (3.75)

$$u(t) = -U(t)\,\mathrm{sign}\,B^T k^T(t_в, t)\,P(t_в)\,M\left[x(t_в)|\,z^{t}_{t_0 *}\right] \qquad (3.77)$$

оптимальное управление в каждый момент времени t максимально по величине и совпадает по знаку с оценкой конечного значения фазовых координат объекта при наблюдениях до момента t.

Однако управление в виде выражения (3.77) не может быть непосредственно реализовано, поскольку оно требует оценки будущих значений фазовых координат, зависящих согласно уравнению (3.13) от будущих значений управляющего воздействия. Для определения закона управления в функции оценок текущих значений фазовых координат $\hat{x}(t)$ будем искать решение системы (3.74) относительно $\hat{\psi}(t)$ в виде

$$\hat{\psi}(t) = -Q(t_в, t)\left[\hat{x}(t) + b(t)\right], \qquad (3.78)$$

где матрица Q и вектор функция b $(n\times 1)$, не зависят от $\hat{\psi}$ и $\hat{x}$.

Подставляя выражение (3.78) в уравнения (3.74) и замечая, что

$$R_{\psi x} = -QR_{xx}, \qquad (3.79)$$

получим дифференциальное уравнение

$$\left[\frac{dQ}{dt} + QA + A^T Q\right]\left[\hat{x}(t) + b(t)\right] +$$

$$+ Q\left[\frac{db}{dt} - Ab + BU\,\mathrm{sign}\,B^T\hat{\psi}(t)\right] = 0, \qquad (3.80)$$

где

$$Q(t_в, t_в) = 2P(t_в). \qquad (3.81)$$

При произвольном значении оценки $\hat{x}$ получаем

$$\frac{dQ}{dt} + QA + A^T Q = 0. \qquad (3.82)$$

Отсюда для конечных условий (3.81) получим

$$Q(t_в, t) = 2k^T(t_в, t) P(t_в) k(t_в, t), \qquad (3.83)$$

где $k^T(t_в, t)$ удовлетворяет уравнению (3.76), а

$k(t_в, t)$ — транспонированному уравнению.

При

$$B^T \hat{\psi}(t) > 0 \qquad (3.84)$$

вектор $b(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{db}{dt} - Ab + BU = 0, \quad \text{где } b(t_в) = 0 \qquad (3.85)$$

и

$$b(t) = \int_t^{t_в} k(t, \tau) BU \, d\tau; \qquad (3.86)$$

при

$$B^T \hat{\psi}(t) < 0 \qquad (3.87)$$

имеем

$$\frac{db}{dt} - Ab - BU = 0, \quad b(t_в) = 0 \qquad (3.88)$$

и

$$b(t) = -\int_t^{t_в} k(t, \tau) BU \, d\tau. \qquad (3.89)$$

Подставляя в соотношения (3.84) и (3.85) выражения (3.79), (3.86) и (3.89), получим неравенства

$$B^T Q \hat{x} < -B^T Q \int_t^{t_в} k(t, \tau) BU \, d\tau; \qquad (3.90)$$

$$B^T Q \hat{x} > B^T Q \int_t^{t_в} k(t, \tau) BU \, d\tau. \qquad (3.91)$$

Из этих неравенств при

$$B^T Q \int_t^{t_в} k(t, \tau) BU \, d\tau > 0 \qquad (3.92)$$

следует, что в области существования решения (3.72)

$$|B^T Q \hat{x}| > |B^T Q \int_t^{t_в} k(t, \tau) BU \, d\tau| \qquad (3.93)$$

и, следовательно,

$$|B^T Q \hat{x}| > |B^T Q b|. \qquad (3.94)$$

Таким образом, при $B^T \hat{\psi}(t) \neq 0$

$$u(t) = -U(t) \operatorname{sign} B^T k^T(t_в, t) P(t_в) k(t_в, t) \hat{x}(t) \qquad (3.95)$$

и решение пропорционально знаку оценки текущих значений фазовых координат.

Пример. 3.4. Рассмотрим задачу определения управления

$$|u| \leqslant 1$$

линейным объектом

$$\dot{x}_1 = u + \zeta, \quad x_1(t_0) = x_{10},$$

$$\dot{x}_2 = x_1, \quad x_2(t_0) = x_{20}$$

по критерию минимума среднего квадрата пролета

$$R = \Delta x_1(t_в) + x_2(t_в).$$

В рассматриваемом случае

$$P(t_в) = \begin{vmatrix} \Delta^2 & \Delta \\ \Delta & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad k(t, \tau) = \begin{vmatrix} 1(t-\tau) & 0 \\ t-\tau & 1(t-\tau) \end{vmatrix}.$$

Произведение матриц

$$B^T k^T(t_в, t) P(t_в) k(t_в, t) \hat{x}(t) = (t_в + \Delta - t)[(t_в + \Delta - t)\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t)],$$

так как

$$t < t_в, \quad \Delta > 0,$$

то

$$u(t) = \operatorname{sign}[(t_в + \Delta - t)\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t)],$$

где $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ определяются уравнениями (3.47) и (3.48).

Непосредственной подстановкой можно показать, что

$$B^TQ(t_в, t)\int_t^{t_в} k(t,\tau)B\,d\tau = 2(t_в + 2\Delta - t) > 0,$$

поэтому условие (3.92) выполняется.

3.5. РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНОГО КОНТУРА ТЕЛЕУПРАВЛЕНИЯ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА ДИСПЕРСИИ ПРОЛЕТА

Ранее рассматривались задачи оптимального управления, в которых не фиксировалась заранее принадлежность закона управления к какому-либо классу динамических систем.

Здесь мы предположим, что система телеуправления в целом принадлежит к классу линейных динамических систем с постоянными параметрами и конечной памятью, и рассмотрим задачу определения импульсной переходной функции системы в этом случае.

В качестве воздействия на контур телеуправления рассмотрим линейную координату

$$h_з(t) = h_0 + \dot{h}_0 t + \frac{jt^2}{2}, \qquad (3.96)$$

измеряемую с ошибками $n(t)$, являющимися стационарным белым шумом с характеристиками

$$M[n(t)] = 0, \quad M(n(t_1)\,n(t_2)] = N\delta(t_1 - t_2). \qquad (3.97)$$

Обычно h_0 и $\dot{h}_0$, характеризующие начальные ошибки процесса телеуправления, неизвестны априори и изменяются в широких пределах, а ускорение j ограничено.

Выходной координатой контура будем считать пролет $R_р(t)$.

Рассматривая процесс на выходе при значениях времени t, больших памяти T системы, получим

$$R_р(t) = \int_0^T k(\tau)[h_з(t-\tau) + n(t-\tau)]\,d\tau. \qquad (3.98)$$

Ошибка системы согласно уравнению кинематических связей (1.70) может быть записана в виде

$$R(t) = t_{oc}\dot{h}_з + h_з(t) - \int_0^T k(\tau)[h_з(t-\tau) + n(t-\tau)]\,d\tau, \qquad (3.99)$$

где t_{oc} — время, оставшееся до встречи.

Для систем управления, этап телеуправления в которых не является конечным, положим [24, 27]

$$t_{oc} \geqslant t_0, \qquad (3.100)$$

где t_0 — некоторое конечное время.

Из выражения (3.99) может быть определено значение динамической ошибки $R_д$ в момент t_0, т. е.

$$t_{oc} = t_0. \qquad (3.101)$$

Введя моментные условия

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^T k(\tau)\,d\tau = 1; \qquad \int_0^T \tau k(\tau)\,d\tau = -t_0; \\ &\int_0^T \tau^2 k(\tau)\,d\tau = -2C_2, \end{aligned}\right\} \qquad (3.102)$$

получим, что

$$R_д(t_0) = C_2 j. \qquad (3.103)$$

Случайная ошибка $R_{сл}(t)$ в процессе телеуправления определяется из уравнения (3.99) выражением

$$R_{сл}(t) = \int_0^T k(\tau)\, n(t-\tau)\,d\tau. \qquad (3.104)$$

Дисперсия случайной ошибки с учетом (3.97)

$$D_R = N\int_0^T k^2(\tau)\,d\tau. \qquad (3.105)$$

Поскольку ускорение объекта $j_р$ связано с пролетом $R_р(t)$ уравнением

$$\frac{dR_р}{dt} = t_{oc} j_р(t), \qquad (3.106)$$

то случайная составляющая ускорения определяется соотношением

$$j_р(t) = \frac{1}{t_{oc}}\,\frac{dR_с(t)}{dt}. \qquad (3.107)$$

Подставляя выражение (3.104) в уравнение (3.107) и применяя формулу интегрирования по частям, получим при условии

$$k(T)=k(0)=0; \qquad (3.108)$$

$$j_p(t)=\frac{1}{t_{oc}}\int_0^T \frac{dk(\tau)}{d\tau}\,n(t-\tau)\,d\tau. \qquad (3.109)$$

Дисперсия ускорения с учетом уравнений (3.109) и (3.97) определяется выражением

$$D_j=\frac{N}{t_{oc}^2}\int_0^T k(\tau)\,\frac{d^2k(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau. \qquad (3.110)$$

Заметим, что условия (3.108) необходимы для конечности дисперсии ускорения D_j при белом шуме $n(t)$.

Ограничение дисперсии ускорения при синтезе контура телеуправления может быть учтено с помощью неравенства

$$\int_0^T k(\tau)\,\frac{d^2k(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau \leqslant C_j. \qquad (3.111)$$

При этом

$$D_j \leqslant \frac{NC_j}{t_{oc}^2}. \qquad (3.112)$$

Рассмотрим задачу определения импульсной переходной функции $k(\tau)$ стационарного контура телеуправления, минимизирующей дисперсию пролета в виде выражения (3.105) при условиях (3.102) и (3.111) [24].

Условие оптимальности (2.135) в этой задаче примет вид

$$-\psi_4\,\frac{d^2k(\tau)}{d\tau^2}+k(\tau)+\psi_0+\psi_1\tau+\psi_2\tau^2=0, \qquad (3.113)$$

где ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 — неопределенные множители Лагранжа, определяемые из условий (3.102) и (3.111).

Дифференциальное уравнение (3.113) определяет $k(\tau)$ в интервале $0\leqslant\tau\leqslant T$ при граничных условиях (3.108)

$$k(0)=k(T)=0.$$

В частном случае воздействия

$$h_з(t)=h_0+\dot{h}_0\, t \qquad (3.114)$$

решение задачи имеет вид

$$k(\xi)=\frac{1}{T}\left[\frac{1-\dfrac{\operatorname{ch}\beta\left(\xi-\dfrac{1}{2}\right)}{\operatorname{ch}\beta/2}}{1-\dfrac{th\,\beta/2}{\beta/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{(2c+1)\beta\left[\dfrac{\operatorname{sh}\beta\left(\xi-\dfrac{1}{2}\right)}{2\operatorname{ch}\beta/2}-\left(\xi-\dfrac{1}{2}\right)th\dfrac{\beta}{2}\right]}{1-\left(\dfrac{\beta^2}{12}+1\right)\dfrac{th\,\beta/2}{\beta/2}}\right]. \qquad (3.115)$$

Здесь обозначено

$$\beta=\frac{\sqrt{\psi_4}}{T},\quad \xi=\frac{t}{T},\quad c=\frac{t_0}{T}.$$

На рис. 3.1 представлены графики $k(\xi)$ для различных условно принятых значений параметра β, характе-

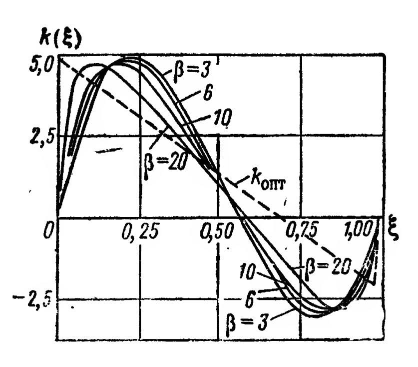


Рис. 3.1. Импульсные переходные функции $k(\xi)$ при различных дисперсиях ускорения

ризующего степень ограничения дисперсии ускорения и $c=0{,}1$. Для сравнения приведена импульсная переходная функция $k_{опт}(\xi)$ системы, рассчитанной без учета ограничения (3.111):

$$k_{опт}(\xi)=\frac{6}{T}\left[\frac{2}{3}-\xi+c(1-2\xi)\right]. \qquad (3.116)$$

На рис. 3.2 представлены относительные дисперсии ускорений

$$d_j = \frac{D_j T}{N}$$

в функции параметра β, а на рис. 3.3 — относительные дисперсии пролета

$$d_R = \frac{D_R \cdot T}{N}.$$

Приведенные графики свидетельствуют о существенной зависимости дисперсии ускорения от параметра β и

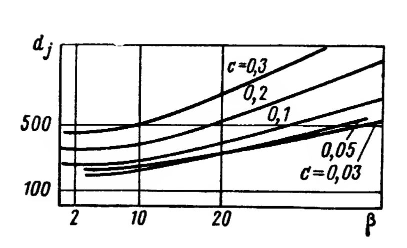


Рис. 3.2. Относительные дисперсии ускорения d_j

Рис. 3.3. Относительные дисперсии пролета d_R

возможности существенного уменьшения дисперсии ускорения при незначительном уменьшении дисперсии пролета.

При $\beta \longrightarrow \infty$ условия оптимальности в виде уравнения (3.113) соответствуют контуру телеуправления, обеспечивающему минимальную дисперсию ускорения при заданных моментных условиях (3.102). Отметим, что в этой задаче дисперсия пролета несущественно (на 20—30%) возрастает по сравнению с системой, не учитывающей ограничение дисперсии ускорений. Отсюда следует возможность расчета контуров телеуправления по критерию минимума дисперсии ускорения при заданном динамическом пролете. Полученный в этом случае контур может обеспечить заданные динамические ошибки при минимальном расходе управляющих сил [27].

3.6. РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНОГО КОНТУРА ТЕЛЕУПРАВЛЕНИЯ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА ДИСПЕРСИИ ЛИНЕЙНОГО ОТКЛОНЕНИЯ

В предыдущем параграфе предполагалось, что точность системы телеуправления определяется значением пролета в конечный момент времени. Такая постановка предполагает, что момент окончания телеуправления $t_т$ меньше момента встречи $t_в$. В этом случае этап телеуправления не является конечным.

Здесь мы рассмотрим случай, когда $t_т = t_в$. При этом ошибка системы телеуправления характеризуется линейным отклонением h, под которым понимается длина перпендикуляра из точки нахождения объекта наведения на прямую, проходящую через цель под заданным углом.

Предположим, как и ранее, что система телеуправления принадлежит к классу стационарных систем с конечной памятью, а воздействие $h_з(t)$ определяется выражением (3.96). Аналогично уравнению (3.99) ошибка системы телеуправления определяется выражением

$$h(t) = h_з(t) - h_р(t), \tag{3.117}$$

где

$$h_р(t) = \int_0^T k(\tau)[h_з(t-\tau) + n(t-\tau)]\, d\tau;$$

$n(t)$ — ошибки измерения, являющиеся белым шумом;

$k(\tau)$ — импульсная переходная функция контура телеуправления.

Динамическая ошибка $h_д(t)$ системы может быть определена с помощью моментных условий (3.102) при $t_0 = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^T k(\tau)\, d\tau = 1; \quad \int_0^T \tau k(\tau)\, d\tau = 0, \\ &\int_0^T \tau^2 k(\tau)\, d\tau = -2C_2, \end{aligned}\right\} \tag{3.118}$$

где C_2 определяет динамическую ошибку, возникающую при маневре цели, аналогично выражению (3.103).

Дисперсия случайной ошибки определяется выражением

$$D_h = N \int_0^T k^2(\tau)\,d\tau, \qquad (3.119)$$

где N — уровень спектральной плотности белого шума $n(t)$.

Согласно кинематическим уравнениям (см. гл. I) ускорение объекта $j_р$ связано с линейным отклонением $h_р$ уравнением

$$\frac{d^2 h_р(t)}{dt^2} = j_р(t). \qquad (3.120)$$

Дисперсия ускорения $j_р$ определяется второй производной от случайной составляющей $h_р(t)$, равной $h_{р.с}(t)$. По определению

$$\dot{h}_{р.с}(t) = \int_0^T k(\tau)\,\dot{n}(t-\tau)\,d\tau. \qquad (3.121)$$

При условии, что

$$k(0) = k'(0) = k(T) = k'(T) = 0, \qquad (3.122)$$

получим

$$D_j = N \int_0^T k(\tau)\,\frac{d^4 k(\tau)}{d\tau^4}\,d\tau. \qquad (3.123)$$

Далее предлагается решение задачи обеспечения заданной динамической ошибки при минимуме дисперсии ускорения.

Решение этой задачи позволяет оценить предельные возможности системы наведения по точности при ограниченных затратах энергии объекта управления.

Указанная задача сводится к определению импульсной переходной функции $k(\tau)$, минимизирующей (3.123) при условиях (3.118). Используя метод множителей Лагранжа, запишем минимизируемый функционал в виде

$$I = \int_0^T k(\tau)\frac{d^4 k(\tau)}{d\tau^4}\,d\tau - \psi_0 \int_0^T k(\tau)\,d\tau - \psi_1 \int_0^T k(\tau)\,\tau\,d\tau - \psi_2 \int_0^T \tau^2 k(\tau)\,d\tau. \qquad (3.124)$$

Оптимальная импульсная функция $k(\tau)$, минимизирующая (3.124), удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^4k(\tau)}{d\tau^4}=\psi_0+\psi_1\tau+\psi_2\tau^2, \quad 0\leqslant\tau\leqslant T. \qquad (3.125)$$

Решение этого уравнения при граничных условиях (3.122) имеет вид

$$k(\tau)=\tau^2(T-\tau)^2(\psi_0+\psi_1\tau+\psi_2\tau^2). \qquad (3.126)$$

Множители Лагранжа ψ_0, ψ_1, ψ_2 определяются подстановкой (3.126) в моментные условия (3.118):

$$\left.\begin{aligned}\psi_0&=\frac{1050}{T^5}\left(1-\frac{36}{5}\cdot\frac{C_2}{T^2}\right);\\ \psi_1&=-\frac{4200}{T^6}\left(1-\frac{42}{5}\cdot\frac{C_2}{T^2}\right);\\ \psi_2&=\frac{3780}{T^7}\left(1-\frac{28}{3}\cdot\frac{C_2}{T^2}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (3.127)$$

Графики импульсных переходных функций $k(\tau)$, обеспечивающих минимум дисперсии перегрузки при заданной динамической точности, приведены на рис. 3.4.

Полученная система обеспечивает дисперсию линейного отклонения в виде (3.119).

$$D_h=N\int_0^T k^2(\tau)\,d\tau=\frac{210N}{143T}\left(17-248\frac{C_2}{T^2}+1296\frac{C_2^2}{T^4}\right) \qquad (3.128)$$

и дисперсию ускорения в виде (3.123)

$$D_j=N\int_0^T\left(\frac{d^2k(\tau)}{d\tau^2}\right)^2d\tau=\frac{16200N}{T^5}\left(7-120\frac{C_2}{T^2}+560\frac{C_2^2}{T^4}\right). \qquad (3.129)$$

Графики изменения дисперсии линейного отклонения D_h и ускорения D_j в функции памяти системы T приведены на рис. 3.5 для $N=1$ и различных значений C_2.

Известно [17], что оптимальные системы с конечной памятью достаточно сложно реализуются с помощью вычислительных средств. Для получения простых корректирующих устройств воспользуемся методом, обеспечивающим близость характеристик оптимальной $k(\tau)$ и реализуемой $k_n(\tau)$ систем.

Выберем в качестве приближенной систему, описываемую дробно-рациональной передаточной функцией с бес-

конечной памятью. Потребуем, чтобы система обеспечивала динамические и случайные ошибки, равные оптимальным, при условии, что время переходного процесса приближенной системы, определяемое как время изменения реакции на единичную ступенчатую функцию, близко к памяти T оптимальной системы.

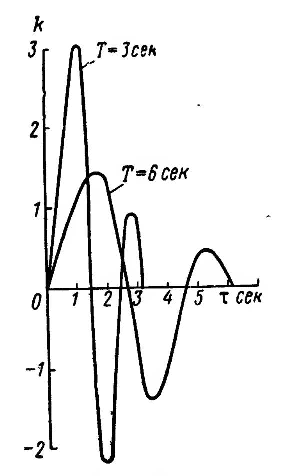


Рис. 3.4. Импульсные переходные функции, обеспечивающие минимум дисперсии ускорения

Рис. 3.5. Дисперсии линейного отклонения D_h и ускорения D_j в функции памяти T

Импульсную переходную функцию $k_n(t)$ запишем в виде [8]

$$k_n(t)=\sum_{i=0}^{4} A_i e^{-\alpha_i t}. \qquad (3.130)$$

Здесь коэффициенты A_i определяются из системы уравнений, обеспечивающей конечность дисперсии ускорения и заданную динамическую ошибку:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty k_n(\tau)\,d\tau=1;\\ &\int_0^\infty \tau k_n(\tau)\,d\tau=0; \quad k_n(0)=k'_n(0)=0;\\ &\int_0^\infty \tau^2 k_n(\tau)\,d\tau=-2C_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3.131)$$

Время переходного процесса может быть обеспечено из условия

$$\left|\int_0^T k_n(\tau)\,d\tau\right| = 1 - \varepsilon, \qquad (3.132)$$

где ε — малая величина.

Дисперсия ускорения в приближенной системе определяется условием

$$N\int_0^\infty \left[\frac{d^2k_n(\tau)}{d\tau^2}\right]^2 d\tau = D_j, \qquad (3.133)$$

где D_j — дисперсия в оптимальной системе (3.129).

Условия (3.132) и (3.133) приводят к нелинейным относительно α_i алгебраическим уравнениям, которые могут быть решены приближенно.

Глава IV

РАСЧЕТ СИСТЕМ ТЕЛЕУПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАННОЙ СТРУКТУРЕ

Рассмотрим пример конкретного проектирования системы телеуправления при заданной структуре ее контура, считая его стационарным до точки встречи.

4.1. УЧЕТ ДИСКРЕТНОСТИ ПОСТУПЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ И ТЕМПА ВЫДАЧИ КОМАНД

Одной из основных особенностей систем телеуправления является дискретность информации и управляющих объектом наведения команд [18]. Дискретность системы управления приводит к специфическим особенностям расчета контуров наведения [21]. Дискретный характер получаемой информации вносит дополнительные запаздывания в контур управления, повышает уровень спектральной плотности случайных ошибок измерения координат, что приводит к снижению динамических качеств системы [24, 27, 28].

Рассмотрим упрощенную структурную схему контура наведения объекта в одной плоскости (рис. 4.1).

При теленаведении объекта до точки встречи имеем $H(s)=1$. Если же этап теленаведения не является конечным, то

$$H(s)=t_0 s+1,$$

где t_0 — некоторое конечное время.

Определим характеристики оптимальной системы для стационарного случая, считая его основным в системах телеуправления, используя в качестве критерия оптимальности «min $\overline{R}^2_{\text{сл}}$» при ограничениях на динамическую точность системы и дисперсию случайного ускорения

«$\bar{j}^2_{сл}$», т. е. рассмотрим задачу, аналогичную задаче, рассмотренной в разделах 3.5 и 3.6 для непрерывной системы.

Предположим, что $\tau_1=\tau_2=\tau_3$.

Функционал, подлежащий минимизации, имеет вид

$$I(w)=\bar{R}^2_{сл}+\alpha\bar{j}^2_{сл}+\sum_{i=0}^{n}\gamma_i\mu_i, \qquad (4.1)$$

где w — искомая весовая функция.

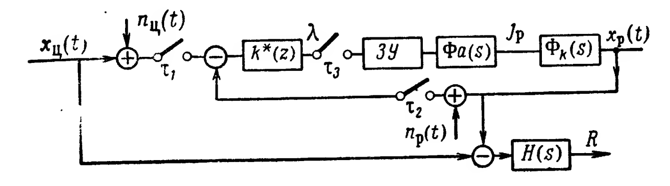


Рис. 4.1. Структурная схема контура телеуправления: τ_1, τ_2, τ_3 — ключи, соответствующие темпу измерения координат цели $x_ц$, объекта $x_р$, передачи команд λ; $k^*(z)$ — цифровое устройство выработки управляющей команды; ЗУ — запоминающее команду устройство на борту объекта; $\Phi_a(s)$ — контур стабилизации объекта с выходной координатой ускорением $j_р$; $\Phi_к(s)$ — кинематическое звено; $n_ц(t)$, $n_р(t)$ — ошибки измерения координат цели и объекта. Измерители координат на структурной схеме отсутствуют. $H(s)$ — оператор определения пролета системы

Определим дисперсии случайного пролета и ускорения объекта

$$\bar{R}^2_{сл}(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\varkappa(t-\bar{t}+l\tau)\sum_{\xi=-\infty}^{\infty}\varkappa(t-\bar{t}+\xi\tau)R_m[(\xi-l)\tau]-$$
$$-2\sum_{\xi=-\infty}^{\infty}\varkappa(t-\bar{t}+\xi\tau)\sum_{l=0}^{N}w(t-\bar{t}+l\tau)R_m[(\xi-l)\tau]+$$
$$+\sum_{l=0}^{N}w(t-\bar{t}+l\tau)\sum_{\xi=0}^{N}w(t-\bar{t}+\xi\tau)\{R_m[(\xi-l)\tau]+$$
$$+R_n[(\xi-l)\tau]\}, \qquad (4.2)$$

где R_m, R_n — корреляционные функции соответственно случайных составляющих полезного сигнала и приведенной к единому входу помехи;

$N\tau$ — время памяти системы:

$$\bar{t}=\theta\tau;$$

θ, l, ξ — целые числа;

$\varkappa(t)$ — весовая функция идеальной системы.

Считаем, что весовая функция по ускорению объекта для системы с теленаведением до точки встречи может быть определена как вторая разность, а для системы с наведением до t_0 — как первая разность весовой функции всей системы. Соответственно получим:

$$\bar{j}^2_{\text{сл.т}}=\sum_{l=0}^{N}\Delta^2 w_{\text{т}}(t-\bar{t}+l\tau)\sum_{\xi=0}^{N}\Delta^2 w_{\text{т}}(t-\bar{t}+\xi\tau)\times$$
$$\times\{R_m[(\xi-l)\tau]+R_n[(\xi-l)\tau]\}; \qquad (4.3)$$

$$\bar{j}^2_{\text{сл.о}}=\frac{1}{(t_{\text{к}}-t)^2}\left(\sum_{l=0}^{N}\Delta w_0(t-\bar{t}+l\tau)\sum_{\xi=0}^{N}\Delta w_0(t-\bar{t}+\xi\tau)\times\right.$$
$$\left.\times\{R_m[(\xi-l)\tau]+R_n[(\xi-l)\tau]\}\right) \qquad (4.4)$$

при $t_{\text{к}}-t=t_0=\text{const}$ ($t_{\text{к}}$ — время наведения).

Суммируя выражения (4.3) и (4.4) по частям, получим

$$\bar{j}^2_{\text{сл.т}}=\sum_{l=0}^{N}w_{\text{т}}(t-\bar{t}+l\tau)\sum_{\xi=0}^{N}w_{\text{т}}(t-\bar{t}+\xi\tau)\times$$
$$\times\{\Delta^4 R_m[(\xi-l)\tau]+\Delta^4 R_n[(\xi-l)\tau]\}; \qquad (4.5)$$

$$\bar{j}^2_{\text{сл.о}}=\frac{1}{t_0^2}\left(\sum_{l=0}^{N}w_{\text{о}}(t-\bar{t}+l\tau)\sum_{\xi=0}^{N}w_{\text{о}}(t-\bar{t}+\xi\tau)\times\right.$$
$$\left.\times\{\Delta^2 R_m[(\xi-l)\tau]+\Delta^2 R_n[(\xi-l)\tau]\}\right) \qquad (4.6)$$

при граничных условиях

$$\left.\begin{aligned}&w_{\text{т}}[t-\bar{t},0]=0; && w_{\text{т}}[t-\bar{t},(N+1)\tau]=0;\\&\Delta w_{\text{т}}[t-\bar{t},0]=0; && \Delta w_{\text{т}}[t-\bar{t},(N+1)\tau]=0.\\&w_{\text{о}}[t-\bar{t},0]=0; && w_{\text{о}}[t-\bar{t},(N+1)\tau]=0.\end{aligned}\right\} \qquad (4.6а)$$

Условия (4.6а) аналогичны условиям (3.122) и (3.108).

Требование обеспечения заданной динамической точности в установившемся состоянии может быть выполнено как и в непрерывном случае с помощью моментных условий

$$\sum_{j=0}^{N}(l\tau)^j w(t-\bar{t}+l\tau)=\mu_j. \qquad (4.7)$$

Подставляя выражения (4.2), (4.5), а также (4.6), (4.6а) и (4.7) в функционал (4.1) и минимизируя полученные выражения, определим соответственно алгебраические уравнения относительно искомых $w\,(t-\bar{t}+l\tau)$ для объекта, этап телеуправления которого заканчивается соответственно в точке встречи или в момент t_0.

$$\sum_{\xi=0}^{N} w_{\tau}(t-\bar{t}+\xi\tau)\Big\{[R_m(\xi-l)\tau+R_n(\xi-l)\tau]-$$

$$-\frac{1}{\alpha_T^4}[\Delta^4 R_m(\xi-l)\tau+\Delta^4 R_n(\xi-l)\tau]\Big\}=$$

$$=\sum_{\xi=-\infty}^{\infty}\varkappa_T(t-\bar{t}+\xi\tau)R_m(\xi-l)\tau+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\gamma_j(l\tau)^j; \qquad (4.8)$$

$$\sum_{\xi=0}^{N} w_{o}(t-\bar{t}+\xi\tau)\Big\{[R_m(\xi-l)\tau+R_n(\xi-l)\tau]-$$

$$-\frac{1}{t_0^2\alpha_0^2}[\Delta^2 R_m(\xi-l)\tau+\Delta^2 R_n(\xi-l)\tau]\Big\}=$$

$$=\sum_{\xi=-\infty}^{\infty}\varkappa_0(t-\bar{t}+\xi\tau)R_m(\xi-l)\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\gamma_j(l\tau)^j, \qquad (4.9)$$

где γ, α — неопределенные множители Лагранжа.

Остановимся на некоторых наиболее простых частных случаях решения (4.8) и (4.9).

Пусть $R_m(\xi - l) = 0$,

$n(l\tau)$ — дискретный «белый шум».

Тогда уравнения (4.8) и (4.9) обращаются в разностные вида

$$\Delta^4 w_т(t-\bar{t}+l\tau) - \alpha_т^4 w_т(t-\bar{t}+l\tau) = -\alpha_т^4[\gamma_0+\gamma_1 l\tau + \ldots + \gamma_n(l\tau)^n]; \tag{4.10}$$

$$\Delta^2 w_0(t-\bar{t}+l\tau) - \alpha_0^2(t_0)^2 w_0(t-\bar{t}+l\tau) = -\alpha_0^2(t_0)^2[\gamma_0+\gamma_1 l\tau + \ldots + \gamma_n(l\tau)^n]; \tag{4.11}$$

откуда

$$w_т(t-\bar{t}+l\tau) = Ee^{\xi n\tau} + Fe^{-\xi n\tau} + C\sin\xi n\tau + D\cos\xi n\tau + \gamma_0^* + \ldots + \gamma_l^*(n\tau)^l; \tag{4.12}$$

$$w_0(t-\bar{t}+l\tau) = Ae^{\beta n\tau} + Be^{-\beta n\tau} + \gamma_0^* + \ldots + \gamma_l^*(n\tau)^l. \tag{4.13}$$

Неизвестные константы E, F, C, D, A, B, γ могут быть определены из граничных и моментных условий

$$\left.\begin{aligned} & w_т[t-\bar{t},\ 0] = 0; \\ & w_т[t-\bar{t},\ (N+1)\tau] = 0; \\ & \Delta w_т[t-\bar{t},\ 0] = 0; \\ & \Delta w_т[t-\bar{t},\ (N+1)\tau] = 0; \\ & \sum_{n=0}^{N} w_т[t-\bar{t}+n\tau] = \mu_0. \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{4.12, a}$$

$$\left.\begin{aligned} & w_0[t-\bar{t},\ 0] = 0; \\ & w_0[t-\bar{t},\ (N+1)\tau] = 0; \\ & \sum_{n=0}^{N} w_0[t-\bar{t}+n\tau] = \mu_0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{4.13, a}$$

Параметры ξ и β, определяющие степень ограничения перегрузки объекта, аналитически выразить практически невозможно. Вычислить дисперсию перегрузки при фиксированных значениях ξ или β достаточно просто. Поэтому ξ и β целесообразно определять графически.

Для примера определим параметры весовой функции (4.13) в простейших случаях.

I случай.

Пусть

$$X_{\text{ц}}(t)=a_0.$$

Тогда

$$w_0(t-\bar{t}+n\tau)=Ae^{\beta n\tau}+Be^{-\beta n\tau}+\gamma_0^*. \qquad (4.14)$$

Раскрывая условия

$$w_0[t-\bar{t},\ 0]=0;$$

$$w_0[t-\bar{t},\ (N+1)\tau]=0;$$

$$\sum_{n=0}^{N} w_0[t-\bar{t}+n\tau]=1,$$

получим

$$A=\frac{b_1}{b_0};\quad B=\frac{b_2}{b_0};\quad \gamma_0^*=\frac{b_3}{b_0};$$

$$b_0=\frac{2[\operatorname{sh}\beta N\tau+\operatorname{sh}\beta\tau-\operatorname{sh}\beta(N+1)\tau\operatorname{ch}\beta\tau]}{1-\operatorname{ch}\beta\tau}-$$

$$-2(N+1)\operatorname{sh}\beta(N+1)\tau;$$

$$b_1=1-e^{-\beta(N+1)\tau};\ b_2=e^{\beta(N+1)\tau}-1;\ b_3=-2\operatorname{sh}\beta(N+1)\tau.$$

На рис. 4.2 изображены весовые функции (4.14) для условно принятых значений β, а на рис. 4.3 — графики дисперсий пролетов и ускорений объекта в зависимости от β.

Как следует из приведенных рисунков, при $\beta\to\infty$ характеристики системы стремятся к характеристикам оптимальной системы без ограничений

$$\overline{R}^2_{\text{сл}\ \beta\to\infty}=\frac{c^2}{N+1}, \qquad (4.15)$$

c^2 — дисперсия единичного замера координаты;

дисперсия ускорения достигает максимального значения, однако в отличие от непрерывной системы она не стремится в бесконечность вследствие ограничения спектра входного сигнала частотой квантования.

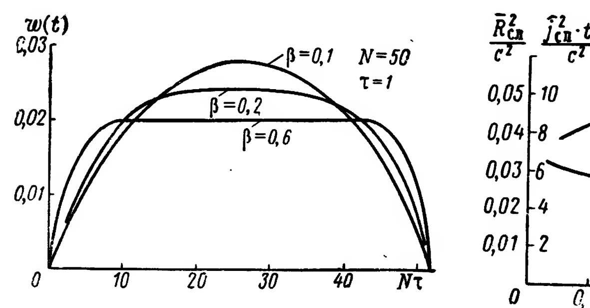


Рис. 4.2. Весовые функции системы нулевого порядка

Рис. 4.3. Графики дисперсий в системе нулевого порядка

II случай.

Примем, что

$$X_{ц}(t)=a_0+a_1t.$$

В этом случае

$$w_0(t-\bar{t}+n\tau)=Ae^{\beta n\tau}+Be^{-\beta n\tau}+\gamma_0^*+\gamma_1^*n\tau. \qquad (4.16)$$

Постоянные A, B, γ_0^*, γ_1^* определяются из условий

$$\left.\begin{aligned} & w_0[t-\bar{t},\ 0]=0; \\ & w_0[t-\bar{t},(N+1)\tau]=0; \\ & \sum_{n=0}^{N} w_0[t-\bar{t}+n\tau]=1; \\ & \sum_{n=0}^{N} n\tau w_0[t-\bar{t}+n\tau]=-t_0-(t-\bar{t}). \end{aligned}\right\} \qquad (4.17)$$

Раскрывая 4.17, получим:

$$A=\frac{b_1}{b_0}; \qquad B=\frac{b_2}{b_0}; \qquad \gamma_0^*=\frac{b_3}{b_0}; \qquad \gamma_1^*=\frac{b_4}{b_0\tau};$$

$$b_0=\frac{N(N+1)^2(N+2)}{12}\left(e^{-\beta(N+1)\tau}-e^{\beta(N+1)\tau}\right)+$$

$$+\frac{N(N+1)(N+2)}{6}\left(\frac{1-e^{-\beta(N+1)\tau}}{1-e^{-\beta\tau}}-\frac{1-e^{\beta(N+1)\tau}}{1-e^{\beta\tau}}\right)-$$

$$-\frac{(N+1)\left[e^{-\beta\tau}-Ne^{-\beta(N+1)\tau}(1-e^{-\beta\tau})-e^{-\beta(N+1)\tau}\right]}{(1-e^{-\beta\tau})^2}\times$$

$$\times\left[\frac{N+2}{2}+\frac{N}{2}e^{\beta(N+1)\tau}-\frac{1-e^{\beta(N+1)\tau}}{1-e^{\beta\tau}}\right]-$$

$$-\frac{(N+1)\left[e^{\beta\tau}-Ne^{\beta(N+1)\tau}(1-e^{+\beta\tau})-e^{+\beta(N+1)\tau}\right]}{(1-e^{\beta\tau})^2}\left[\frac{N+2}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{N}{2}e^{-\beta(N+1)\tau}+\frac{1-e^{-\beta(N+1)\tau}}{1-e^{-\beta\tau}}\right]+$$

$$+\frac{N(2N+1)(N+1)}{6}\left[\frac{e^{\beta(N+1)\tau}-1}{1-e^{-\beta\tau}}-\frac{e^{-\beta(N+1)\tau}-1}{1-e^{\beta\tau}}\right];$$

$$b_1=-\left[\frac{N(N+1)(N+2)}{6}+\frac{N(2N+1)(N+1)e^{-\beta(N+1)\tau}}{6}-\right.$$

$$\left.-(N+1)\frac{e^{-\beta\tau}-Ne^{-\beta(N+1)\tau}(1-e^{-\beta\tau})-e^{-\beta(N+1)\tau}}{(1-e^{-\beta\tau})^2}\right]+$$

$$+\frac{[t_0+(t-\bar{t})]}{\tau}\left[-\frac{(N+1)(N+2)}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{N(N+1)e^{-\beta(N+1)\tau}}{2}+(N+1)\frac{1-e^{-\beta(N+1)\tau}}{1-e^{-\beta\tau}}\right];$$

$$b_2=\frac{N(N+1)(N+2)}{6}+(N+1)\left[\frac{N(2N+1)e^{\beta(N+1)\tau}}{6}-\right.$$

$$\left.-\frac{e^{\beta\tau}-N(1-e^{\beta\tau})e^{\beta(N+1)\tau}-e^{\beta(N+1)\tau}}{(1-e^{\beta\tau})^2}\right]+$$

$$+\frac{t_0+(t-\bar{t})}{\tau}\left[\frac{(N+1)(N+2)}{2}+\frac{N(N+1)e^{\beta(N+1)\tau}}{2}-\right.$$

$$\left.-(N+1)\frac{1-e^{\beta(N+1)\tau}}{1-e^{\beta\tau}}\right];$$

$$b_3=(N+1)\left[\frac{N(2N+1)e^{-\beta(N+1)\tau}}{6}-\right.$$

$$-\frac{e^{-\beta\tau}-Ne^{-\beta(N+1)\tau}(1-e^{-\beta\tau})-e^{-\beta(N+1)\tau}}{(1-e^{-\beta\tau})^2}+$$

$$+\frac{N(2N+1)e^{\beta(N+1)\tau}}{6}+$$

$$+\frac{e^{\beta\tau}-Ne^{\beta(N+1)\tau}(1-e^{\beta\tau})-e^{\beta(N+1)\tau}}{(1-e^{\beta\tau})^2}\Bigg]+$$

$$+\frac{t_0+(t-\bar{t})}{\tau}\Bigg[\frac{N(N+1)}{2}e^{-\beta(N+1)\tau}-(N+1)\times$$

$$\times\frac{1-e^{-\beta(N+1)\tau}}{1-e^{-\beta\tau}}-\frac{N(N+1)}{2}e^{\beta(N+1)\tau}+$$

$$+(N+1)\frac{1-e^{\beta(N+1)\tau}}{1-e^{\beta\tau}}\Bigg];$$

$$b_4=-\frac{e^{\beta\tau}-Ne^{\beta(N+1)\tau}(1-e^{\beta\tau})-e^{\beta(N+1)\tau}}{(1-e^{\beta\tau})^2}(1-e^{-\beta(N+1)\tau})+$$

$$+\frac{e^{-\beta\tau}-Ne^{-\beta(N+1)\tau}(1-e^{-\beta\tau})-e^{-\beta(N+1)\tau}}{(1-e^{-\beta\tau})^2}\times$$

$$\times(1-e^{-\beta(N+1)\tau})-\frac{N(N+1)}{2}(e^{-\beta(N+1)\tau}-e^{\beta(N+1)\tau})-$$

$$-\frac{t_0+(t-\bar{t})}{\tau}\Bigg[\frac{1-e^{\beta(N+1)\tau}}{1-e^{\beta\tau}}(1-e^{-\beta(N+1)\tau})-$$

$$-\frac{1-e^{-\beta(N+1)\tau}}{1-e^{-\beta\tau}}(1-e^{\beta(N+1)\tau})+$$

$$+(N+1)(e^{-\beta(N+1)\tau}-e^{\beta(N+1)\tau})\Bigg].$$

На рис. 4.4 и 4.5 изображены соответственно графики весовых функций системы (4.16) при $t-\bar{t}=0$ и дисперсий пролетов и ускорений в зависимости от параметра β.

При $\beta\longrightarrow\infty$ дисперсия пролета, усредненная по τ, стремится к дисперсии оптимальной системы без ограничения перегрузок

$$\overline{R}^2_{сл}=\frac{2N(2N+1)+6\dfrac{2t_0+\tau}{\tau}N+4\dfrac{3t_0^2+3t_0\tau+\tau^2}{\tau^2}}{N(N+1)(N+2)}c^2. \quad (4.18)$$

При $\beta=0$ получаем систему, оптимальную с точки зрения дисперсии перегрузки. Дисперсия пролета в этом случае возрастает $\approx$ на 30÷40% [27].

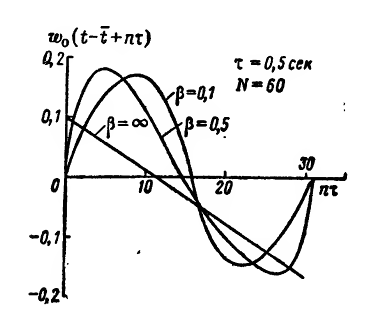


Рис. 4.4. Весовые функции системы первого порядка

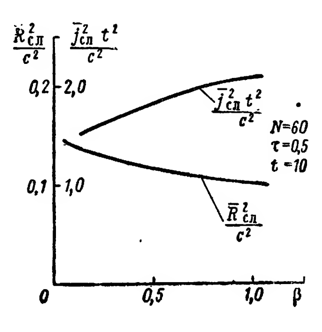


Рис. 4.5. Графики дисперсий в системе первого порядка

Для дискретной системы второго порядка с ограничением перегрузок решение принципиальных трудностей не представляет, однако является чрезвычайно громоздким и требует высокой точности вычислений.

4. 2. МЕТОД РЕАЛИЗАЦИИ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Задачей аппроксимации полученных дискретно-непрерывных систем с конечной памятью приближенными системами с неограниченным временем переходного процесса является определение разностных и дифференциальных уравнений корректирующих звеньев, реализуемых соответственно с помощью цифровых и аналоговых устройств, обеспечивающих равенство характеристик точности оптимальной и приближенной систем. В [8] изложен метод реализации непрерывных систем с конечной памятью.

Чисто дискретные системы могут быть реализованы аналогично. Вопрос реализации дискретно-непрерывных систем с конечной памятью является более сложным, так как требует выбора как непрерывной, так и дискретной частей приближенной системы, обеспечивающих при их соответствующем соединении точность, близкую к точности оптимальной системы.

Рассмотрим наиболее простой метод реализации. Представим контур наведения объекта в виде последо-

вательного соединения дискретного $F_1(n\tau)$ и непрерывного $F_2(t)$ фильтров [31].

Будем искать приближенную систему $w_n(t-\bar{t}+n\tau)$ как последовательное соединение звеньев $F_g(n\tau)$ и $F_н(t)$ с неограниченным временем переходных процессов:

$$w_n(t-\bar{t}+n\tau)=\sum_{l=0}^{n} F_н(t-\bar{t}+n\tau-l\tau)\,F_g(l\tau). \qquad (4.19)$$

Учитывая, что оптимальная система является суммой произведений функций вида $\psi(t-\bar{t})$ и $\varphi(l\tau)$, представим $F_н$ как

$$F_н(t-\bar{t}+l\tau-n\tau)=\sum_{i=1}^{k}\psi_i(t-\bar{t})\,\varphi_i(l\tau-n\tau), \qquad (4.20)$$

где k — число моментных и граничных условий на систему.

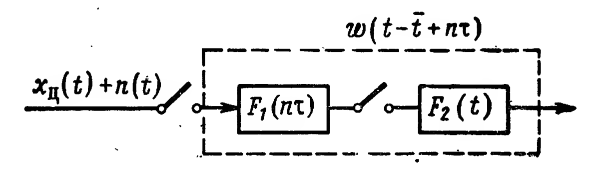


Рис. 4.6. Схема реализации весовой функции оптимальной системы

Определяя неизвестные параметры $F_н$ и F_g из моментных и граничных условий и подставляя их выражения в соотношение (4.19), можно получить весовую функцию приближенной системы.

Найдем выражение приближенной дискретно-непрерывной системы на примере оптимальной системы первого порядка. При этом для простоты опустим условие ограниченности перегрузок объекта, учет которого принципиальных трудностей не вносит.

Тогда

$$w_n(t-\bar{t}+l\tau)=\psi_1(t-\bar{t})\sum_{n=0}^{l}\varphi_1(l\tau-n\tau)\,F_g(n\tau)+$$

$$+\psi_2(t-\bar{t})\sum_{n=0}^{l}\varphi_2(l\tau-n\tau)\,F_g(n\tau). \qquad (4.21)$$

Приближенная система для обеспечения заданной динамической точности должна удовлетворять моментным условиям

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{\infty} w_n(t-\bar{t}+l\tau)=1, \\ &\sum_{l=0}^{\infty} l\tau w_n(t-\bar{t}+l\tau)=-t_0-(t-\bar{t}). \end{aligned}\right\} \quad (4.22)$$

Требуемое время переходного процесса и дисперсия пролета обеспечиваются обычно приближенно соответствующим выбором свободного параметра системы.

Подставим выражение (4.21) в соотношения (4.22) и разрешим полученную систему уравнений относительно функций $\psi_i(t-\bar{t})$:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1(t-\bar{t})=d_1+l_1(t-\bar{t}); \\ &\psi_2(t-\bar{t})=d_2+l_2(t-\bar{t}), \end{aligned}\right\} \quad (4.23)$$

где

$$\left.\begin{aligned} d_1=\frac{1}{L}\Bigg[&\sum_{l=0}^{\infty} l\tau \sum_{n=0}^{l} \varphi_2(l\tau-n\tau)F_g(n\tau)+ \\ &+t_0\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{l} \varphi_2(l\tau-n\tau)F_g(n\tau)\Bigg]; \\ d_2=-\frac{1}{L}\Bigg[&t_0\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{l} \varphi_1(l\tau-n\tau)F_g(n\tau)+ \\ &+\sum_{l=0}^{\infty} l\tau \sum_{n=0}^{l} \varphi_1(l\tau-n\tau)F_g(n\tau)\Bigg]. \end{aligned}\right\} \quad (4.24)$$

$$\left.\begin{aligned} &l_1=\frac{1}{L}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{l} \varphi_2(l\tau-n\tau)F_g(n\tau); \\ &l_2=-\frac{1}{L}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{l} \varphi_1(l\tau-n\tau)F_g(n\tau). \end{aligned}\right\} \quad (4.25)$$

$$\left.\begin{aligned} L = \sum_{l=0}^{\infty} l\tau \sum_{n=0}^{l} \varphi_2(l\tau - n\tau) F_g(n\tau) \times \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{l} \varphi_1(l\tau - n\tau) F_g(n\tau) - \\ - \sum_{l=0}^{\infty} l\tau \sum_{n=0}^{l} \varphi_1(l\tau - n\tau) F_g(n\tau) \times \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{l} \varphi_2(l\tau - n\tau) F_g(n\tau); \end{aligned}\right\} \quad (4.26)$$

$$F_{н}(t - \bar{t} + l\tau - n\tau) = d_1\varphi_1(l\tau - n\tau) + d_2\varphi_2(l\tau - n\tau) + \\ + (t - \bar{t})[l_1\varphi_1(l\tau - n\tau) + l_2\varphi_2(l\tau - n\tau)];$$

$$F_{н}(t - \bar{t} + l\tau - n\tau) = L_1(l\tau - n\tau) + (t - \bar{t}) L_2(l\tau - n\tau). \quad (4.27)$$

Так как функция $F_{н}$ зависит от суммы аргументов $(t - \bar{t})$ и $(l\tau - n\tau)$, она должна удовлетворять условию

$$\frac{\partial F_{н}(t - \bar{t} + l\tau - n\tau)}{\partial (t - \bar{t})} = \frac{\partial F_{н}(t - \bar{t} + l\tau - n\tau)}{\partial (l\tau - n\tau)}. \quad (4.28)$$

Из условия (4.28) следует

$$L_2 = b; \quad L_1 = a + b(l\tau - n\tau),$$

т. е. $F_{н}(t - \bar{t} + l\tau - n\tau) = a + b(t - \bar{t} + l\tau - n\tau)$. (4.29)

Определив $F_{н}$ и подставив выражение (4.19) в соотношения (4.22), найдем тождественные зависимости относительно аргумента $(t - \bar{t})$

$$\left.\begin{aligned} a \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{l} F_g(n\tau) + b \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{l} (l\tau - n\tau) F_g(n\tau) + \\ + b(t - \bar{t}) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{l} F_g(n\tau) = 1. \\ a \sum_{l=0}^{\infty} l\tau \sum_{n=0}^{l} F_g(n\tau) + b \sum_{l=0}^{\infty} l\tau \sum_{n=0}^{l} (l\tau - n\tau) F_g(n\tau) + \\ + b(t - \bar{t}) \sum_{l=0}^{\infty} l\tau \sum_{n=0}^{l} F_g(n\tau) = -t_0 - (t - \bar{t}). \end{aligned}\right\} \quad (4.30)$$

Условия (4.30) могут быть выполнены только в том случае, если дискретная система является дифференцирующей второго порядка, т. е.

$$F_g(n\tau)=\Delta^2 F_{g1}(n\tau), \tag{4.31}$$

при этом

$$\begin{aligned} F_{g1}(0)&=0;\\ \Delta F_{g1}(0)&=0. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Требования (4.31) и (4.32) физически понятны, так как в рассматриваемом случае непрерывная система (4.29) имеет полюс второго порядка, который необходимо компенсировать.

Раскрывая выражения (4.30) и используя соотношения (4.31) и (4.32), получим систему четырех алгебраических уравнений для определения параметров $F_g(n\tau)$ и a, b системы при точном выполнении моментных условий (4.22)

$$\left.\begin{aligned} &F_{g1}(0)=0; \quad F_{g1}(\tau)=0;\\ &\sum_{n=0}^{\infty} F_{g1}[(n+1)\tau]=\frac{1}{b};\\ &\sum_{n=0}^{\infty} n\tau F_{g1}[(n+1)\tau]=\frac{a}{b}-\frac{t_0}{b}. \end{aligned}\right\} \tag{4.33}$$

Зададим $F_{g1}(n\tau)$ в виде [см. (3.130)]

$$F_{g1}(n\tau)=\sum_{i=1}^{k} A_i e^{-\alpha_i n\tau}. \tag{4.34}$$

Примем α_i изменяющимися по геометрической прогрессии и из решения системы (4.33) определим дискретную и непрерывную составляющие весовой функции приближенной системы.

Для системы первого порядка положим $k=3$, тогда

$$\left.\begin{aligned} &F_{g1}(n\tau)=A_1 e^{-\alpha n\tau}+A_2 e^{-2\alpha n\tau}+A_3 e^{-4\alpha n\tau};\\ &F_{н}(t)=a+bt; \end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{(e^{+2\alpha\tau}-1)(e^{4\alpha\tau}-1)}{b\tau^2(e^{3\alpha\tau}-1)e^{\alpha\tau}};\\
A_2 &= -\frac{e^{4\alpha\tau}-1}{b\tau 2e^{\alpha\tau}};\\
A_3 &= \frac{e^{\alpha\tau}(e^{\alpha\tau}-1)(e^{4\alpha\tau}-1)}{b\tau 2(e^{3\alpha\tau}-1)};\\
a &= \frac{b\tau\left\{e^{-2\alpha\tau}(e^{-\alpha\tau}+1)(e^{2\alpha\tau}+1)(e^{\alpha\tau}+1)^2+\right.}{(e^{4\alpha\tau}-1)(e^{-2\alpha\tau}+e^{-\alpha\tau}+1)}\\
&\quad \frac{\left.+(e^{2\alpha\tau}+1)(e^{-2\alpha\tau}+e^{-\alpha\tau}+1)\left[\frac{t_c}{\tau}(e^{2\alpha\tau}-1)-e^{\alpha\tau}\right]\right\}}{1}.
\end{aligned}\right\} \quad (4.36)$$

Параметр b перераспределяет коэффициент усиления между дискретной и непрерывной частями системы и может быть задан произвольно.

Выбрав α в виде $\alpha \approx \frac{1{,}5 \div 2}{N\tau}$, $\quad$ (4.37)

получим приближенную систему, дисперсия пролета которой несущественно отличается от дисперсии оптималь-

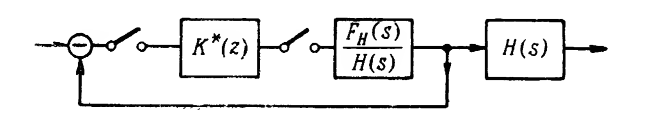


Рис. 4.7. Структурная схема реализации системы телеуправления

ной системы, а время переходного процесса близко к расчетному. Определим теперь выражения корректирующих устройств.

Представим структурную схему $w(t-\bar{t}+n\tau)$ в виде рис. 4.7.

При телеуправлении до точки встречи имеем $H(s)=1$.

Выражение $\frac{F_н(s)}{H(s)}$ представляет собой последователь-

ное соединение кинематического звена $\frac{1}{s^2}$ и бортового контура объекта $\Phi_a(s)$.

Дискретное корректирующее звено $K^*(z)$ определяется зависимостью

$$K^*(z)=\frac{F_g(z)}{1-F_g(z)\,z\left\{\frac{F_{\text{н}}(s)}{t_0 s+1}\right\}}, \tag{4.38}$$

где z — символ z-преобразования.

В рассмотренном примере

$$\Phi_a(s)=\frac{as+b}{t_0 s+1}; \tag{4.39}$$

$$K^*(z)=\frac{l_0 z^2+l_1 z}{z^2+d_1 z+d_2}, \tag{4.40}$$

где

$$l_0=A_1(e^{-5\alpha\tau}+e^{-3\alpha\tau})+A_2(e^{-3\alpha\tau}+e^{-6\alpha\tau})+A_3(e^{-5\alpha\tau}+e^{-6\alpha\tau})$$

$$l_1=-l_0 e^{-\frac{\tau}{t_0}}$$

$$d_1=-\left\{\left(e^{-4\alpha\tau}+e^{-2\alpha\tau}+e^{-\alpha\tau}+e^{-\frac{\tau}{t_0}}\right)+\right.$$

$$\left.+l_0\left[(t_0-a)\left(1-e^{-\frac{\tau}{t_0}}\right)-1\right]-2\right\}$$

$$d_2=e^{-7\alpha\tau-\frac{\tau}{t_0}}.$$

Следует отметить, что заданная часть каждой системы наведения для фиксирования команд, поступающих на объект, должна содержать запоминающее устройство с передаточной функцией

$$K_{\text{з.у}}(s)=\frac{1-e^{-s\tau}}{s}. \tag{4.41}$$

Выражение (4.41) должно быть учтено при реализации дискретной и непрерывной частей системы. Непрерывная составляющая корректирующего устройства $\Phi_a(s)$

может быть реализована соответствующим выбором стабилизирующих обратных связей при формировании автономного контура объекта, установкой фильтров по цепи прямого сигнала и т. д.

В качестве примера на рис. 4.8 приведены частотные характеристики некоторой приближенной системы, аппроксимирующей рассмотренную оптимальную систему первого порядка.

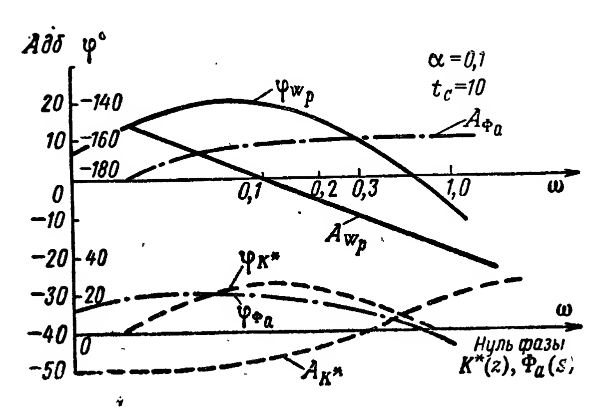


Рис. 4.8. Частотные характеристики корректирующих звеньев дискретно-непрерывной системы

Как видно из рис. 4.8, для реализации требуемой точности в каждый момент времени непрерывные звенья коррекции в значительной степени участвуют в формировании основных свойств системы.

Если непрерывная часть системы фиксированная, например, контур стабилизации объекта удовлетворяет требованиям самонаведения, которые более жесткие, заданная точность может быть реализована с помощью цифрового фильтра только в моменты времени, кратные периоду квантования. Если время «памяти» системы значительно превосходит период дискретности $\left(\frac{T}{\tau} \geqslant 20\right)$, то точность в промежутках между съемами информации существенно не изменится.

4.3. О РЕАЛИЗАЦИИ ЦИФРОВЫХ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ФИЛЬТРОВ

Выше изложен один из методов получения цифрового фильтра в дискретно-непрерывной системе.

При заданной бортовой части объекта оказывается возможным и целесообразным определять цифровой корректирующий фильтр в виде z-формы от фильтра, полученного формированием системы как непрерывной. Хотя в этом случае и имеет место некоторое искажение характеристик системы относительно оптимальных (особенно на высоких частотах), в части реализации фильтра преимущества несомненны. Рассмотрим корректирующее устройство, которое может быть получено в результате реализации различными способами оптимальных систем, определяемых из условий (3.113), (3.126).

$$K(s)=\frac{T_1^2s^2+2T_1\xi_1s+1}{(T_2^2s^2+2T_2\xi_2s+1)(T_3s+1)}. \qquad (4.42)$$

Найдем z-преобразование от передаточной функции (4.42):

$$K^*(z)=\frac{D(z)}{F(z)}. \qquad (4.43)$$

При $\xi_2<1$ имеем

$$\left.\begin{aligned}
D(z)={}&\left(\frac{A\tau}{T_2^2}+\frac{C\tau}{T_3}\right)z^3+\\
&+\left\{\frac{A}{T_2}\left(\frac{B\tau}{A}-\frac{\tau\xi_2}{T_2}\right)\frac{e^{-\frac{\tau\xi_2}{T_2}}}{\sqrt{1-\xi_2^2}}\sin\frac{\tau}{T_2}\sqrt{1-\xi_2^2}-\right.\\
&-\frac{A\tau}{T_2^2}e^{-\frac{\xi_2\tau}{T_2}}\cos\frac{\tau}{T_2}\sqrt{1-\xi_2^2}-\frac{A\tau}{T_2^2}e^{-\frac{\tau}{T_3}}-\\
&\left.-2\frac{C\tau}{T_3}e^{-\frac{\xi_2\tau}{T_2}}\cos\frac{\tau}{T_2}\sqrt{1-\xi_2^2}\right\}z^2+\\
&+\left\{-\frac{A}{T_2}\left(\frac{B\tau}{A}-\frac{\tau\xi_2}{T_2}\right)\sqrt{1-\xi_2^2}\,e^{-\frac{\tau\xi_2}{T_2}-\frac{\tau}{T_3}}\sin\frac{\tau}{T_2}\sqrt{1-\xi_2^2}+\right.\\
&\left.+\frac{A\tau}{T_2^2}e^{-\frac{\xi_2\tau}{T_2}-\frac{\tau}{T_3}}\cos\frac{\tau}{T_2}\sqrt{1-\xi_2^2}+\frac{C\tau}{T_3}e^{-\frac{2\xi_2\tau}{T_2}}\right\}z;\\
F(z)={}&z^3+\left\{-2e^{-\frac{\xi_2\tau}{T_2}}\cos\frac{\tau}{T_2}\sqrt{1-\xi_2^2}-e^{-\frac{\tau}{T_3}}\right\}z^2+
\end{aligned}\right\}$$

$$+\left\{2e^{-\frac{\xi_2\tau}{T_2}-\frac{\tau}{T_3}}\cos\frac{\tau}{T_2}\sqrt{1-\xi_2^2}+e^{-\frac{2\xi_2\tau}{T_2}}\right\}z-$$

$$-e^{-\frac{2\xi_2\tau}{T_2}-\frac{\tau}{T_3}},$$

где

$$A=\frac{T_3\left(T_1^2-T_2^2\right)+2T_1T_2\left(T_2\xi_1-T_1\xi_2\right)}{T_3^2+T_2^2-2T_2T_3\xi_2};$$

$$B=\frac{T_3\left(2T_1\xi_1-2T_2\xi_2\right)-T_1^2+T_2^2}{T_3^2+T_2^2-2T_2T_3\xi_2};$$

$$C=\frac{T_3^2+T_1^2-2T_1T_3\xi_1}{T_3^2+T_2^2-2T_2T_3\xi_2}.$$

При $\xi_2>1$ имеем

$$D(z)=\tau(A+B+C)\,z^3+\left[-A\tau\left(e^{-\beta\tau}+e^{-\frac{\tau}{T_3}}\right)-\right.$$

$$\left.-B\tau\left(e^{-\frac{\tau}{T_3}}+e^{-\alpha\tau}\right)-C\tau\left(e^{-\alpha\tau}+e^{-\beta\tau}\right)\right]z^2+$$

$$+\tau\left(Ae^{-\beta\tau-\frac{\tau}{T_3}}+Be^{-\alpha\tau-\frac{\tau}{T_3}}+Ce^{-\alpha\tau-\beta\tau}\right)z;$$

$$F(z)=z^3+\left(-e^{-\alpha\tau}-e^{-\beta\tau}-e^{-\frac{\tau}{T_3}}\right)z^2+\left(e^{-\beta\tau-\frac{\tau}{T_3}}+\right.$$

$$\left.+e^{-\alpha\tau-\beta\tau}+e^{-\alpha\tau-\frac{\tau}{T_3}}\right)z-e^{-\alpha\tau-\beta\tau-\frac{\tau}{T_3}}, \tag{4.44}$$

$$A=\frac{T_1^2T_3\alpha^2\beta-T_1^2\alpha^2-2T_1\xi_1T_3\alpha\beta+\beta T_3+2T_1\xi_1\alpha-1}{T_2^2\left(T_3^2\alpha^2\beta-T_3\alpha^2-T_3^2\alpha\beta^2+T_3\beta^2+\alpha-\beta\right)};$$

$$B=\frac{2T_1\xi_1T_3\alpha\beta-\alpha T_3-T_1^2T_3\alpha\beta^2+T_1^2\beta^2-2T_1\xi_1\beta+1}{T_2^2\left(T_3^2\alpha^2\beta-T_3\alpha^2-T_3^2\alpha\beta^2+T_3\beta^2+\alpha-\beta\right)};$$

$$C=\frac{\alpha T_3^2-2T_1\xi_1T_3\alpha-\beta T_3^2+2T_1\xi_1T_3\beta+T_1^2\alpha-T_1^2\beta}{T_2^2\left(T_3^2\alpha^2\beta-T_3\alpha^2-T_3^2\alpha\beta^2+T_3\beta^2+\alpha-\beta\right)};$$

$$\alpha=-\frac{-\xi_2+\sqrt{\xi_2^2-1}}{T_2};\qquad \beta=-\frac{-\xi_2-\sqrt{\xi_2^2-1}}{T_2}.$$

Одной из основных особенностей (4.44) является высокая потребная точность вычисления коэффициентов. Допустимая погрешность в вычислении приближенно может быть задана как

$$\frac{T^k}{\tau^k}\,(\text{ист})-\frac{T^k}{\tau^k}\,(\text{выч})\leqslant 0{,}1, \qquad (4.45)$$

где T^k — коэффициент при старшей производной дифференциального уравнения фильтра;

k — порядок дифференциального уравнения.

Первый член соотношения (4.45) представляет собой истинное, а второй вычисленное значение параметра $\frac{T^k}{\tau^k}$.

Определим $K^*(z)$ для передаточной функции (4.42) по соотношениям (4.44) при следующих условно взятых конкретных значениях параметров.

$$T_1=24;\ T_2=7;\ T_3=4; \qquad \xi_1=1{,}5;\ \xi_2=2;\ \tau=0{,}5.$$

Имеем

$$K^*(z)=\frac{1{,}50505-2{,}90609z^{-1}+1{,}40199z^{-2}}{1-2{,}62968z^{-1}+2{,}29323z^{-2}-0{,}6626z^{-3}}. \qquad (4.46)$$

Как видно из выражения (4.46), ошибка в коэффициенте числителя при z^{-2} на 0,0005 приводит к тому, что общий коэффициент усиления меняется в 1,5÷2 раза, а ошибка — 0,001 в коэффициенте знаменателя при z^{-1} — к неустойчивости корректирующего устройства.

Требование высокой точности к параметрам дискретных фильтров обусловливает трудности их реализации [21]. Во-первых, разрядность специализированных вычислительных машин должна быть ограничена, а дополнительные операции с удвоением разрядности нежелательны, так как увеличивают время обработки информации. Во-вторых, в системах наведения, работающих в широком диапазоне условий, необходимо менять коррекцию по режимам полета объекта (скоростному напору, высоте, дальности и т. д.). При этом характеристики системы фиксируются в узловых точках, между которыми производится интерполяция их значений. Интерполировать коэффициенты дискретных фильтров для получения требуемых свойств системы по режимам наведения очень сложно [32]. В связи с этим можно пойти по пути интерполяции коэффициента усиления и постоянных времени непрерывного аналога. Реализация кор-

ректирующих устройств подобным образом, повидимому, более справедлива, так как коэффициенты T_i, ξ_i при своем выполнении допускают значительные разбросы. В этом случае коэффициенты дискретных фильтров вычисляются в каждый необходимый по условиям задачи момент времени.

Однако проводить вычисление управляющей команды, используя соотношения (4.44) также достаточно сложно.

Гораздо проще воспользоваться преобразованием Эйлера, определяющим z-форму фильтра простой заменой оператора дифференцирования первой разностью, т. е. полагая

$$s=\frac{1}{\tau}(1-z^{-1}). \qquad (4.47)$$

Для системы телеуправления частотные характеристики корректирующих устройств, полученных методом Эйлера, должны несущественно отличаться от частотных характеристик, найденных z-преобразованием от непрерывного аналога.

На рис. 4.9 для примера приведены частотные характеристики $K^*(z)$, полученные z-преобразованием передаточной функции (4.42) и преобразованием Эйлера от этого же выражения. Для следующих условно принятых параметров

$$T_1=24;\ T_2=7;\ T_3=4;\ \xi_1=1{,}5;\ \xi_2=2;\ \tau=0{,}5$$

z-формы, по которым рассчитывались частотные характеристики соответственно для z-преобразования и преобразования Эйлера, имеют вид $K_z^*(z)$ [см. выражение 4.46)] и

$$K_э^*(z)=\frac{1{,}07560-2{,}08695z^{-1}+1{,}01185\,z^{-2}}{1-2{,}65963z^{-1}+2{,}3487\,z^{-2}-0{,}68862z^{-3}}.$$

Как видно из рис. 4.9, характеристики отличаются несущественно.

На примере передаточной функции (4.42) для преобразования Эйлера рассмотрим способ, позволяющий сократить до минимума число операций, выполняемых в вычислительной машине с повышенной точностью, а так-

же общее количество операций. В качестве констант в алгоритм ЦВМ могут быть заложены коэффициенты:

$$b_0=\frac{T_1^2}{\tau^2};\quad b_1=\frac{2T_1\xi_1}{\tau};\quad b_2=\frac{T_2^2T_3}{\tau^3};$$

$$b_3=\frac{2\xi_2T_2T_3+T_2^2}{\tau^2};\quad b_4=\frac{T_3+2\xi_2T_2}{\tau},$$

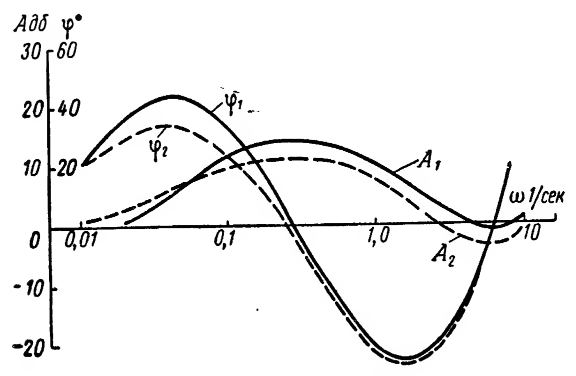


Рис. 4.9. Частотные характеристики корректирующего звена при различных способах реализации

а выходной сигнал $x(n)$ корректирующего фильтра вычисляется по формуле

$$x[n]=\frac{1}{c_0^*}\{y[n]+c_1\Delta y[n]+c_2\Delta^2 y[n]-$$

$$-c_1^*x[n-1]-c_1^{**}x[n-1]-c_2^*x[n-2]-c_3^*x[n-3]\}, \quad (4.48)$$

где

$$c_1=b_1;\quad c_2=b_0;\quad c_3^*=-b_2;\quad c_2^*=3b_2+b_3;$$

$$c_1^*=-(3b_2+b_3);\quad c_1^{**}=-(b_3+b_4);\quad c_0^*=1-c_3^*-c_1^{**},$$

причем порядок вычислений соответствует наиболее простому варианту структурной схемы, приведенной на рис. 4.10.

При реализации корректирующего звена соответственно этой структурной схеме высокая точность вычислений требуется только при получении коэффициента c_0^* и при делении на полученную сумму; причем потребная точность определяется необходимостью воспроизведения последнего знака целого числа в сумме $1+b_2+b_3+b_4$.

Как видно, данный алгоритм вычислений достаточно прост.

Следует отметить, что в отличие от непрерывных систем для цифровых устройств существенное значение может иметь время выхода фильтра на режим, что непосредственно связано с заданием начальных условий на его координаты.

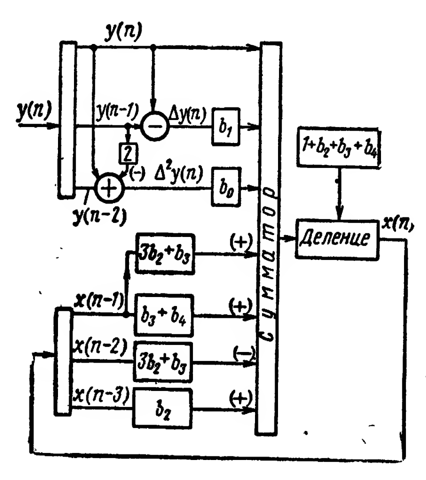


Рис. 4.10. Блок-схема реализации цифрового корректирующего устройства

Будем насыщать цифровой фильтр, заданный в виде (4.48), следующим образом. На первом такте работы при получении одного замера $y[n]$ решение единственно, т. е.

$$x[1]=y[1]. \qquad (4.49)$$

При реализации чистых дифференциаторов решение может начаться только по нескольким замерам: двум — для вычисления первой производной, трем — для второй и т. д. На втором замере предполагаем, что входной сигнал имел до начала работы фильтра постоянную производную, определяемую по двум полученным замерам, а выходной сигнал $x[n]$ был равен $y[n]$, тогда

$$x[2]=\frac{1}{c_0^*}\{y[2]+c_1\Delta y[2]-(c_1^*+c_1^{**})\,y[1]-c_2^*\{2y[1]-$$
$$-y[2]\}-c_3^*\{3y[1]-2y[2]\}\}. \qquad (4.50)$$

По трем замерам недостающую координату вычисляем, проводя через них параболу [32]:

$$x[3]=\frac{1}{c_0^*}\{y[3]+c_1\Delta y[3]+c_2\Delta^2 y[3]-(c_1^*+c_1^{**})x[2]-$$

$$-c_2^* x[1]-c_3^*\{-3{,}5y[3]+9y[2]-4{,}5y[1]\}\}. \qquad (4.51)$$

Со следующего такта фильтр уже работает в полностью насыщенном режиме согласно выражению (4.48).

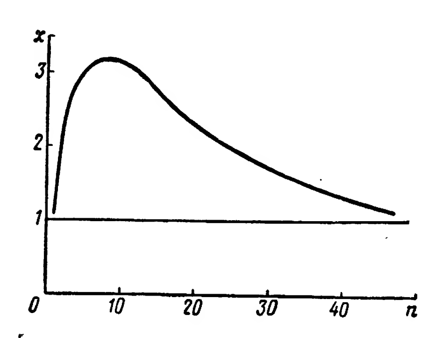


Рис. 4.11. Переходные процессы отработки единичного воздействия корректирующим звеном

На рис. 4.11 приведены переходные процессы отработки фильтром $K^*(z)$ единичного скачка соответственно при нулевых начальных условиях и при насыщении его описанным способом (прямая $x=1$). Сравнивая кривые, видим, что при отсутствии насыщения время выхода фильтра на заданный режим существенно.

Корректирующие фильтры более высоких порядков нецелесообразно реализовать в дискретных системах телеуправления вследствие значительной сложности. В процессе проектирования желательно стремиться к уменьшению порядка цифровых фильтров, используя по возможности при формировании оптимальных систем заданную непрерывную часть. Повидимому, определенный интерес представляет рассмотрение так называемых фильтров с конечной памятью, выходной сигнал которых определяется по двум, максимум трем, значениям входной координаты, т. е.

$$x[n]=y[n]+a_1\Delta y[n]+a_2\Delta^2 y[n]. \qquad (4.52)$$

Реализация такого фильтра проста: выход на режим работы соответствует всего двум—трем тактам дискретности. Пролеты могут быть обеспечены близкими к пролетам в оптимальной системе. Соответствующим формированием бортового контура ракеты можно ограничить перегрузки в допустимых пределах. Тогда возможность использования таких фильтров определится соотношением дисперсии управляющей команды и ее допустимого значения, так как последняя в данном случае ограничивается только частотой квантования.

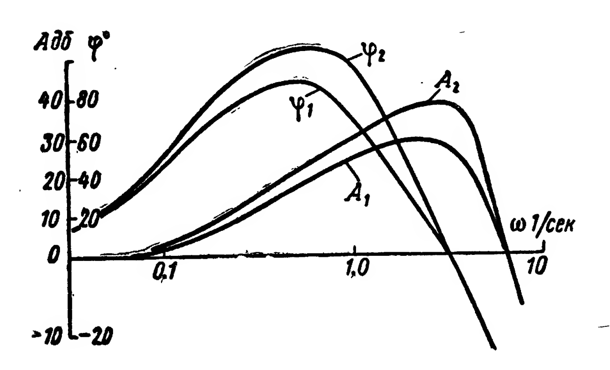


Рис. 4.12. Частотные характеристики звеньев коррекции с конечным и неограниченным временем переходных процессов

На рис. 4.12 приведены частотные характеристики $K^*(z)$, для которого в первом случае непрерывным аналогом является выражение (4.42), а во втором фильтр вида $T^2S^2+2T\xi S+1$, обеспечивающие примерно одинаковую память по выходной координате.

Расчеты проводились при следующих условно заданных значениях параметров:

$$T_1=5;\quad T_2=0{,}4;\quad T_3=0;\quad T=5;$$

$$\xi_1=1;\quad \xi_2=1;\quad \xi=1;\quad \tau=1.$$

Как следует из приведенного рисунка, на низких частотах получается достаточно близкое совпадение. Наибольшее расхождение характеристик наблюдается на средних частотах, которое может быть скомпенсировано

формированием бортового контура. На высоких частотах управляющей команды характеристики вновь близки из-за ограничения частоты квантования.

Однако следует отметить, что использование фильтров с конечной памятью не позволяет значительно повысить добротность системы управления [17], что практически исключает целесообразность их применения в системах теленаведения до точки встречи.

4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЕНСАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ В КОНТУРЕ

В предыдущих разделах контур телеуправления рассматривался в виде замкнутой системы, воздействия на которую приведены к одной точке — ее входу. Однако наличие двух независимых источников информации, измеряющих координаты цели и объекта, позволяет обрабатывать их раздельно, т. е. построить двухполосную систему разомкнуто-замкнутой структуры, заданные характеристики которой обеспечиваются с помощью двух различных звеньев коррекции. Если формировать систему как двухполосную, то система интегральных уравнений относительно искомых весовых функций $w_1(\tau)$ и $w_2(\tau)$, полученная для критерия (4.1) при телеуправлении с самонаведением на конечном участке, имеет вид

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{T_1} w_1(\tau)\Big\{R_{m_1}(t-\tau)+R_{n_1}(t-\tau)+\\&\qquad+\alpha\left[\frac{\partial^2 R_{m_1}(t-\tau)}{\partial t\,\partial\tau}+\frac{\partial^2 R_{n_1}(t-\tau)}{\partial t\,\partial\tau}\right]\Big\}\,d\tau+\\&+\int_0^{T_2} w_2(\tau)\left\{R_{n_{12}}(t-\tau)+\alpha\,\frac{\partial^2 R_{n_{12}}(t-\tau)}{\partial t\,\partial\tau}\right\}d\tau=\\&=\sum_{i=0}^{k_1}\gamma_{1i}t^i+\int_{-\infty}^{\infty}\varkappa_1(\tau)R_{m_1}(t-\tau)\,d\tau;\end{aligned}\right\}\quad(4.53)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_0^{T_2} w_2(\tau)\Bigg\{R_{m_2}(t-\tau)+R_{n_2}(t-\tau)+\\
&\qquad+\alpha\left[\frac{\partial^2 R_{m_2}(t-\tau)}{\partial t\,\partial\tau}+\frac{\partial^2 R_{n_2}(t-\tau)}{\partial t\,\partial\tau}\right]\Bigg\}d\tau+\\
&+\int_0^{T_1} w_1(\tau)\left\{R_{n_{21}}(t-\tau)+\alpha\,\frac{\partial^2 R_{n_{21}}(t-\tau)}{\partial t\,\partial\tau}\right\}d\tau=\\
&\qquad=\sum_{i=0}^{k_2}\gamma_{2i}t^i+\int_{-\infty}^{\infty}\varkappa_2(\tau)R_{m_2}(t-\tau)\,d\tau
\end{aligned}
\right\}
\qquad (4.53)
$$

при следующих граничных условиях:

$$
\begin{aligned}
&w_1(0)=0; \quad w_1(T_1)=0,\\
&w_2(0)=0, \quad w_2(T_2)=0,
\end{aligned}
\qquad (4.54)
$$

где индексами «1» и «2» обозначены весовые функции, а также характеристики входных воздействий соответственно по первому (каналу цели) и второму (каналу объекта) входам.

Решения (4.53) сравнительно просто могут быть получены в общем виде, однако останавливаться на них не будем, так как, по нашему мнению, практической ценности они не представляют. Если принять, что случайные процессы измерения координат цели и объекта между собой не коррелированы, то система (4.53) распадается на два уравнения, зависимость между которыми сохраняется только через условие ограничения перегрузок. Требуя, чтобы объект расходовал вполне определенную часть располагаемой перегрузки при воздействии на входы системы каждого из случайных сигналов измерения координат, получим полностью независимые уравнения относительно весовых функций $w_1(\tau)$ и $w_2(\tau)$. Определив передаточные функции системы с обратной связью $W_2(s)$, всей системы со входом по координате цели $W_1(s)$ и разделив $W_1(s)$ на $W_2(s)$, можно получить звено коррекции в разомкнутой цепи. Параметры $W_1(s)$ и $W_2(s)$ определяются характеристиками измеренных сигналов и ошибками бортовой аппаратуры объекта. Для примера определим корректирующие звенья $K_1^*(z)$, $K_2^*(z)$ двухполосной системы, изображенной на рис. 4.13.

Возьмем систему второго порядка и реализуем ее в виде

$$k(t) = A_0 e^{-\alpha t} + A_1 e^{-2\alpha t} + A_2 e^{-4\alpha t} + A_\gamma e^{-\gamma\alpha t}. \quad (4.55)$$

Определяя постоянные A_0, A_1, A_2, A_γ из моментных условий

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty k(t)\,dt = 1, \\ &\int_0^\infty t k(t)\,dt = -t_0; \\ &\int_0^\infty t^2 k(t)\,dt = -c_2 \end{aligned}\right\} \quad (4.56)$$

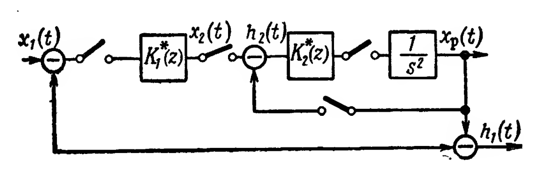


Рис. 4.13. Структурная схема двухконтурной системы телеуправления

и из граничного условия

$$K(0) = 0 \quad (4.57)$$

и переходя в частотную область, получим

$$W(s) = \frac{\left[\dfrac{7\left(5-\gamma-\dfrac{20}{\gamma^2}+\dfrac{16}{\gamma^3}\right)+2\alpha t_0\left(45-7\gamma-\dfrac{70}{\gamma}+\dfrac{32}{\gamma^3}\right)}{\left[\dfrac{1}{\gamma}\left(7-\dfrac{14}{\gamma}+\dfrac{8}{\gamma^2}\right)-1\right]8\alpha^2\gamma} - c_2\right]s^2 + \left(\dfrac{4+7\gamma}{4\alpha\gamma}+t_0\right)s + 1}{\dfrac{1}{8\alpha^4\gamma}s^4 + \dfrac{7+\gamma}{8\alpha^3\gamma}s^3 + \dfrac{7(2+\gamma)}{8\alpha^2\gamma}s^2 + \dfrac{45-7\gamma-\dfrac{70}{\gamma}+\dfrac{32}{\gamma^3}}{\left[\dfrac{1}{\gamma}\left(7-\dfrac{14}{\gamma}+\dfrac{8}{\gamma^2}\right)-1\right]4\alpha\gamma}s + 1}. \quad (4.58)$$

Свободные параметры α и γ могут быть определены из условий обеспечения заданного времени переходного процесса и степени ограничения ускорения объекта

$$K_2(s)=$$

$$=\frac{\left[\dfrac{7\left(5-\gamma_2-\dfrac{20}{\gamma_2^2}+\dfrac{16}{\gamma_2^3}\right)+2\alpha_2 t_0\left(45-7\gamma_2-\dfrac{70}{\gamma_2}+\dfrac{32}{\gamma_2^3}\right)}{\left[\dfrac{1}{\gamma_2}\left(7-\dfrac{14}{\gamma_2}+\dfrac{8}{\gamma_2^2}\right)-1\right]8\alpha_2^2\gamma_2}-c_{22}\right]\times}{c_{22}\left\{\dfrac{t_0}{8\alpha_2^4\gamma_2 c_{22}}s^3+\dfrac{1+(7+\gamma_2)\alpha_2 t_0}{8\alpha_2^4\gamma_2 c_{22}}s^2+\right.}$$

$$\frac{\times s^2+\left(\dfrac{4+7\gamma_2}{4\alpha_2\gamma_2}+t_0\right)s+1}{\left.+\dfrac{7\alpha_2 t_0(2+\gamma_2)+7+\gamma_2}{8\alpha_2^3\gamma_2 c_{22}}s+1\right\}} \qquad (4.59)$$

и

$$K_1(s)=\frac{W_1(s)}{W_2(s)}. \qquad (4.60)$$

Пусть параметры гипотетически заданной системы имеют следующие значения: $\alpha_1=0{,}06$; $\alpha_2=0{,}03$; $c_{21}=20$; $c_{22}=1000$; $\gamma_1=15$; $\gamma_2=30$; $\tau=1{,}5$ *сек*.

Данные значения α соответствуют временам переходных процессов в первой системе $T_1\approx 50$ *сек* и во второй $T_2\approx 100$ *сек*.

Обращаясь к выражениям (4.59) и (4.60) при заданных параметрах, получим:

$$K_2(s)=0{,}001\,\frac{630s^2+70s+1}{52s^3+62s^2+16s+1};$$

$$K_1(s)=\frac{(550s^2+40s+1)(33s+1)}{(1620s^2+70s+1)(4s+1)}.$$

Полагая $s=\dfrac{1-z^{-1}}{\tau}$, определим выражения цифровых фильтров

$$K_1^*(z)=\frac{5{,}1724683-14{,}753878z^{-1}+14{,}032383z^{-2}-4{,}4501661z^{-3}}{1-2{,}5880289z^{-1}+2{,}2180891z^{-2}-0{,}62925298z^{-3}};$$

$$K_2^*(z)=\frac{0{,}00600372-0{,}01112331z^{-1}+0{,}00513789z^{-2}}{1-2{,}046158z^{-1}+1{,}343485z^{-2}-0{,}279020z^{-3}}.$$

На рис. 4.14 приведены графики сигналов $x_1(t)$, $x_2(t)$, а также ошибок наведения $h_1(t)$, $h_2(t)$, полученные расчетом системы на ЦВМ с фильтрами $K_1^*(z)$ и $K_2^*(z)$.

На рис. 4.14 $x_1(t)$ — заданный входной сигнал, $x_1(t) = 5t^2$; $x_2(t)$ опережает $x_1(t)$, так как $T_1 < T_2$.

Установившиеся значения ошибок h_1 и h_2 соответствуют расчетным, т. е.

$$h_1 = 10\ c_{21} = 200;$$

$$h_2 = 10\ c_{22} = 10000.$$

Если точности измерения координат цели и объекта соизмеримы, а ошибки бортовой аппаратуры существенны, то характеристики $W_1(s)$ и $W_2(s)$ должны быть близ-

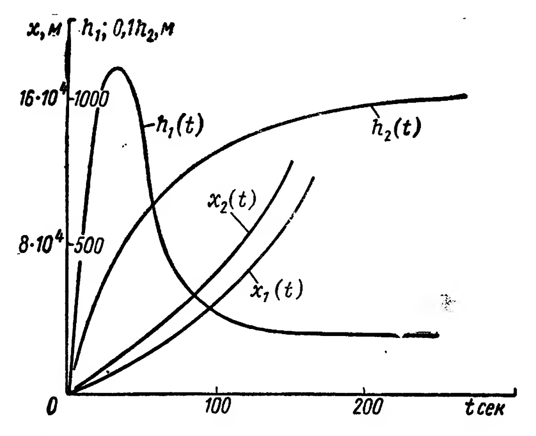


Рис. 4.14. Графики переходных процессов в двухконтурной системе

ки. При достаточно точной бортовой аппаратуре нет необходимости делать быстродействующей систему по координатам объекта.

Следует, однако, отметить, что системы управления, реализованные по разомкнуто-замкнутой структуре, критичны к разбросам параметров, причем их критичность тем выше, чем больше опережающих свойств системы заложено во внешней корректирующей цепи.

Рассмотрим систему телеуправления (3.126). Примем форму реализации выражения (4.55), добавив дополнительный член $A_3 e^{-8\alpha t}$.

При телеуправлении до точки встречи выражение (4.56) обращается в следующее:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty k(t)\,dt=1;\\&\int_0^\infty tk(t)\,dt=0;\\&\int_0^\infty t^2k(t)\,dt=-c_2.\end{aligned}\right\} \qquad (4.61)$$

Для конечности перегрузки, кроме условия (4.57), необходимо второе условие

$$k'(0)=0. \qquad (4.62)$$

Определяя константы A_i из условий (4.57, 4.62, 4.61) и переходя в частотную область, получим:

$$W(s)=\frac{(l_0-c_2)\,s^2+l_1s+1}{l_0^*s^5+l_1^*s^4+l_2^*s^3+l_0s^2+l_1s+1};$$

$$\left.\begin{aligned}&l_0=\frac{60+35\gamma}{32\gamma\alpha^2}; \qquad l_1=\frac{8+15\gamma}{8\gamma\alpha};\\&l_0^*=\frac{1}{64\gamma\alpha^5}; \qquad l_1^*=\frac{15+\gamma}{64\gamma\alpha^4};\\&l_2^*=\frac{70+15\gamma}{64\gamma\alpha^3}.\end{aligned}\right\} \qquad (4.63)$$

Положим в соотношении (4.63) в первом случае $c_{21}=0$, а во втором, соответствующем системе с обратной связью, $c_{22}=c_2$. Разделив первую систему на вторую, получим при сохранении быстродействия ($l_{i_1}=l_{i_2}$) корректирующее устройство на входе, повышающее порядок астатизма всей системы до третьего

$$K_1(s)=\frac{l_0s^2+l_1s+1}{(l_0-c_2)\,s^2+l_1s+1}. \qquad (4.64)$$

Представим $K_1(s)$ в виде, приведенном на рис. 4.15, и определим выражение компенсационного сигнала

$$\sigma_к(s)=X_ц(s)W_к(s), \qquad (4.65)$$

где
$$W_к(s)=\frac{c_2s^2}{(l_0-c_2)s^2+l_1s+1}. \qquad (4.66)$$

Аналогично для системы с теленаведением до момента t_0 можно определить $K_1(s)$ и $W_к(s)$,
где

$$l_0=\frac{7\left(5-\gamma-\frac{20}{\gamma^2}+\frac{16}{\gamma^3}\right)+2\alpha t_c\left(45-7\gamma-\frac{70}{\gamma}+\frac{32}{\gamma^3}\right)}{\left[\frac{1}{\gamma}\left(7-\frac{14}{\gamma}+\frac{8}{\gamma^2}\right)-1\right]8\alpha^2\gamma}; \qquad (4.67)$$

$$l_1=\frac{4+7\gamma}{4\alpha\gamma}+t_0. \qquad (4.68)$$

Таким образом, сигнал компенсации динамической ошибки системы теленаведения с астатизмом второго по-

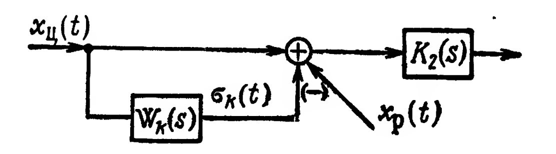


Рис. 4.15. Схема реализации двухконтурной системы

рядка может быть определен посредством двойного дифференцирования входного воздействия с весом, обратно пропорциональным коэффициенту усиления контура управления.

Если цепь компенсации суммировать непосредственно с управляющей командой, выражения $W_{к\lambda}$ соответственно принимают следующий вид:

$$W_{\text{к}\lambda\text{т}}(s)=\frac{c_2s^2}{\frac{l_0^*}{c_2}s^3+\frac{l_1^*}{c_2}s^2+\frac{l_2^*}{c_2}s+1}; \qquad (4.99)$$

$$W_{\text{к}\lambda 0}=\frac{c_2s^2}{\frac{t_0}{8\alpha^4\gamma c_2}s^3+\frac{1+(7+\gamma)\alpha t_0}{8\alpha^4\gamma c_2}s^2+\frac{7\alpha t_0(2+\gamma)+7+\gamma}{8\alpha^3\gamma c_2}s+1}. \qquad (4.70)$$

При получении выражений (4.69) и (4.70) предполагалось, что коэффициент усиления $K_2(s)=1$.

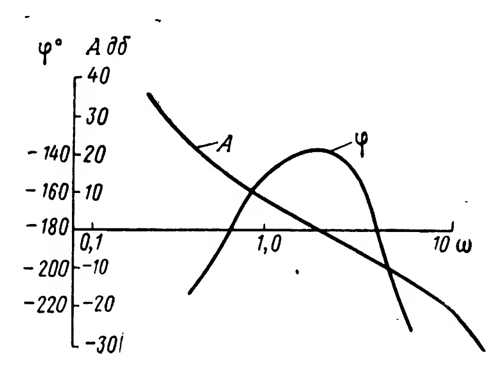


Рис. 4.16. Частотные характеристики системы, астатической третьего порядка

Если положить $c_2=0$, получим одноконтурную замкнутую систему, астатическую третьего порядка. Очевидно, что при номинальных параметрах система с внешней компенсирующей цепью и замкнутая система ($c_2=0$), идентичны по основному входному сигналу — координате цели. Системы отличаются по степени фильтрации ошибок измерения координат объекта и отработке ложных сигналов бортового контура. Наибольшее различие систем имеет место при разбросах их параметров относительно номинальных значений. На рис. 4.16 изображены частотные характеристики разомкнутой системы (4.63) при следующих значениях условно принятых параметров:

$$c_2=0; \quad \alpha=0{,}75; \quad \gamma=8.$$

Как видно из рис. 4.16, фазочастотная характеристика системы имеет две точки пересечения с осью 180°, т. е.

как справа, так и слева от частоты среза возможен неустойчивый режим работы. В системах телеуправления, особенно на участке отработки больших начальных рассогласований, возможны существенно нелинейные режимы, приводящие к падению коэффициента усиления контура наведения [11]. В этом случае на низких частотах может наступить неустойчивость системы. С другой стороны, увеличивать c_2 также нежелательно, так как в этом случае при разбросах коэффициента усиления в системе будут иметь место систематические ошибки. Оценим влияние разброса коэффициента усиления контура управления на величину установившейся динамической ошибки. Легко показать, что увеличение динамической ошибки из-за разброса коэффициента усиления системы может быть определено как

$$\Delta\varepsilon_g = c_2 \eta \dot{j}_{\text{рп}}, \tag{4.71}$$

где

$$c_2 = \frac{1}{K};$$

$\dot{j}_{\text{рп}}$ — потребное ускорение объекта при отработке входного сигнала;

$\eta = \frac{\Delta K}{K}$ — относительный разброс коэффициента усиления системы.

Таким образом, величина динамической ошибки из-за разброса коэффициента усиления системы обратно пропорциональна величине этого коэффициента. Реализация системы с компенсацией динамической ошибки внешней цепью приводит к уменьшению коэффициента усиления контура, охваченного обратной связью, а следовательно, к увеличению динамических ошибок, связанных с разбросом параметров системы.

На рис. 4.17 приведены частотные характеристики системы (4.63) для различных значений коэффициента c_2. Как следует из этого рисунка, с увеличением c_2 растут запасы устойчивости системы на низких частотах. При проектировании систем телеуправления целесообразно выбирать характеристики замкнутой системы, соответствующими такому минимальному значению c_2, при котором возможные разбросы параметров не нарушат устойчивый режим работы системы.

Статистические характеристики системы при разбросах ее коэффициента усиления могут быть определены следующим образом. Если известно, что коэффициент

усиления системы может принимать случайные значения, а его разбросы относительно номинальной величины подчинены нормальному закону распределения и имеют математическое ожидание $m_0=0$ и среднеквадратическое

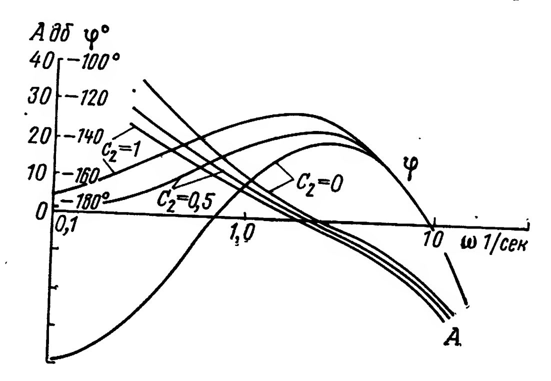


Рис. 4.17. Частотные характеристики системы при различных c_2

отклонение $\sigma_{\Delta K}$, передаточная функция системы, по которой могут быть определены ошибки, имеет вид [20]:

$$\Phi_{K^*}(s)\approx\Phi(s)+\left[\frac{\partial\Phi(s,\ K^*)}{\partial K^*}\right]_{\Delta K=0}\Delta K+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\Phi(s,\ K^*)}{\partial K^{*2}}\right]_{\Delta K=0}\Delta K^2+\ldots, \qquad (4.72)$$

где $\Phi(s)$ — передаточная функция системы при номинальных параметрах,

$$K^*=K+\Delta K;$$

K — номинальное значение коэффициента усиления;

ΔK — отклонение текущего значения коэффициента усиления от номинального.

Дисперсии пролета и ускорения объекта в условиях разброса K соответственно могут быть определены как

$$D_R\approx\frac{N^2}{\pi}\int_0^\infty\left\{|\Phi_R(j\omega)|^2+\bar{\sigma}_{\Delta K}^2\left|\frac{\partial\Phi_R(j\omega,K^*)}{\partial K^*}\right|^2_{\Delta K=0}+\ldots\right\}d\omega; \qquad (4.73)$$

$$D_j\approx\frac{N^2}{\pi}\int_0^\infty\left\{|\Phi_j(j\omega)|^2+\bar{\sigma}_{\Delta K}^2\left|\frac{\partial\Phi_j(j\omega,\ K^*)}{\partial K^*}\right|^2_{\Delta K=0}+\ldots\right\}d\omega, \qquad (4.74)$$

где N^2 — уровень спектральной плотности «белого шума» на входе системы.

Дисперсии пролета и ускорения объекта возрастают с увеличением коэффициента c_2. Очевидно, выражения D_R и D_j легко могут быть распространены на случай разброса нескольких параметров в системе.

Рассмотрим формирования компенсационных сигналов для широко распространенных в системах телеуправления ракет методов наведения [7, 11]. Обращаясь к выражению (4.66) видим, что сглаживающие свойства сигналов компенсации определяются характеристиками замкнутого контура и не зависят от метода наведения. Поэтому остановимся только на определении второй производной входного сигнала.

Метод трех точек

Уравнение метода

$$\varepsilon_р D_р = \varepsilon_ц D_р. \tag{4.75}$$

Входной сигнал на систему управления $x_{вх}$ можно рассматривать в виде

$$x_{вх} = \varepsilon_ц D_р. \tag{4.76}$$

Дифференцируя дважды (4.76), получаем

$$\sigma_к = \ddot{\varepsilon}_ц D_р + 2\dot{\varepsilon}_ц \dot{D}_р + \varepsilon_ц \ddot{D}_р. \tag{4.77}$$

Последним членом уравнения (4.77) можно пренебречь.

Для исключения дополнительных обратных связей и флюктуаций целесообразно использовать табличные значения $D_р$ и особенно $\dot{D}_р$, усредненные по режимам наведения, что существенных погрешностей в (4.77) не вносит, т. е.

$$\sigma_к \approx \ddot{\varepsilon}_ц D_{рт} + 2\dot{\varepsilon}_ц \dot{D}_{рт}. \tag{4.78}$$

Методы спрямления траектории

Распространенная форма реализации

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_р D_р &= \left(\varepsilon_ц + \frac{\Delta D}{\alpha\,|\Delta \dot{D}|}\,\dot{\varepsilon}_ц\right) D_р; \\ \Delta D &= D_ц - D_р, \end{aligned}\right\} \tag{4.79}$$

где α — коэффициент, определяющий степень спрямления.

Полагая $\alpha=1$, получим метод полного спрямления; $\alpha=2$ — метод половинного спрямления.

Считая, что $\frac{\Delta D}{|\Delta \dot{D}|}\approx t_0$ — время, оставшееся до точки встречи, и дифференцируя дважды правую часть выражения (4.79), находим

$$\sigma_k=\frac{t_0}{\alpha}D_р\dddot{\varepsilon}_ц+\left[\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\dot{D}_р+\frac{2t_0}{\alpha}\dot{D}_р\right]\ddot{\varepsilon}_ц+$$
$$+\left[\frac{t_0}{\alpha}\ddot{D}_р+\left(2-\frac{2}{\alpha}\right)\dot{D}_р\right]\dot{\varepsilon}_ц+\ddot{D}_р\varepsilon_ц \qquad (4.80)$$

или при

$$\dddot{\varepsilon}_ц\approx 0;\quad \ddot{D}_р\approx 0;\quad D_р\approx D_{р.т};\quad \dot{D}_р\approx\dot{D}_{р.т};$$
$$\sigma_к\approx\left[\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)D_{рт}+\frac{2t_0}{\alpha}\dot{D}_{рт}\right]\ddot{\varepsilon}_ц+\left(2-\frac{2}{\alpha}\right)\dot{D}_{рт}\dot{\varepsilon}_ц. \qquad (4.81)$$

В частных случаях для метода полного спрямления ($\alpha=1$)

$$\sigma_к\approx(2t_0\dot{D}_{рт}-D_{рт})\,\ddot{\varepsilon}_ц; \qquad (4.82)$$

для метода половинного спрямления ($\alpha=2$)

$$\sigma_к\approx t_0\dot{D}_{рт}\ddot{\varepsilon}_ц+\dot{D}_{рт}\dot{\varepsilon}_ц \qquad (4.83)$$

или вблизи точки встречи

$$\sigma_к\approx\dot{D}_{рт}\dot{\varepsilon}_ц. \qquad (4.84)$$

Приближенный метод параллельного сближения

Уравнение метода

$$\varepsilon_р\dot{D}_р=\varepsilon_ц\dot{D}_р+(\varepsilon_ц-\varepsilon_{сб})\,\Delta\dot{D},$$

или

$$\varepsilon_р D_р=\varepsilon_ц D_ц-\varepsilon_{сб}\Delta D. \qquad (4.85)$$

$\varepsilon_{сб}$ — постоянный на этапе наведения угол сближения объекта и цели;

$$\left.\begin{aligned} x_{вх} &= \varepsilon_ц D_ц - \varepsilon_{сб} \Delta D, \\ \sigma_к &= \ddot{\varepsilon}_ц D_ц + 2\dot{\varepsilon}_ц \dot{D}_ц + \ddot{D}_ц \varepsilon_ц - \Delta\ddot{D} \varepsilon_{сб}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.86)$$

Пренебрегая последними двумя составляющими в формуле (4.86), получаем

$$\sigma_k \approx \ddot{\varepsilon}_ц D_ц + 2\dot{\varepsilon}_ц \dot{D}_ц. \qquad (4.87)$$

Следует отметить, что реализация формулы (4.87) требует высокой точности, так как составляющие выражения, как правило, довольно велики и имеют разные знаки, что при фильтрации может привести к появлению ложных сигналов.

Проще реализовать σ_k, если имеется возможность непосредственно вычислять вторую производную произведения $\varepsilon_ц D_ц$.

На больших дальностях между объектом и целью для методов наведения (4.79) и (4.85), чтобы уменьшить случайные ошибки, в упрежденных членах целесообразно использовать либо дополнительную фильтрацию $\dot{\varepsilon}_ц$ и $\varepsilon_{сб}$, либо ΔD выбирать несколько меньшим своего истинного значения, например, вычислять по формуле

$$\overline{\Delta D} = \frac{\Delta D}{1 + K\Delta D}, \qquad (4.88)$$

где $K = \text{const}$ $K \ll 1$.

Выражения компенсационных сигналов в этом случае могут не корректироваться.

4.5. УЧЕТ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ОШИБОК ПРИ СИНТЕЗЕ

В предыдущих разделах характеристики контуров управления определялись без учета систематических ошибок, вызываемых инструментальными погрешностями систем наведения. Однако последние в системах телеуправления могут иметь существенное значение. Для РЛС, сопровождающих цель и объект разными лучами, значи-

тельных величин могут достигать ошибки вычисления разностных углов, вызванные неточностью юстировки осей антенн. Бороться с этим система управления практически не может [7, 24].

Если за целью и ракетой следит один луч, то систематические ошибки вычисления разностного угла зависят от степени упреждения и достаточно малы вблизи точки встречи [27]. При использовании абсолютной угловой координаты цели, либо объекта при формировании управления систематические ошибки системы могут быть значительны. В процессе сближения эту составляющую закона наведения целесообразно уменьшать, оставляя в момент встречи только разностный сигнал.

При использовании упрежденных методов наведения к этому же результату могут привести систематические ошибки измерения дальностей. Систематические ошибки случайны от опыта к опыту и медленно изменяются в одной реализации процесса наведения.

В системах телеуправления имеют место инструментальные ошибки, вызванные разбросами системы стабилизации объекта, а также систематическими ошибками различных датчиков, нестабильностью коэффициентов усиления и т. д. Систематические ошибки имеют место в аналоговых и цифровых счетно-решающих приборах [23].

Составляющие этих ошибок могут быть приведены к ложному управляющему сигналу, воздействующему на систему стабилизации. Их влияние на точность наведения определяется быстродействием замкнутого контура.

Наряду с медленно меняющимися ошибками радиолокационные станции могут содержать инструментальные составляющие, случайные в одной реализации, но сильно коррелированные между каналами цели и объекта. Влияние случайных инструментальных ошибок на точность наведения может быть устранено либо за счет сглаживания обоих составляющих, если они достаточно высокочастотны, либо формированием идентичных систем по каналам цели и объекта [17].

Обратимся к уравнениям (4. 53) относительно весовых функций по каналам управления цели $w_1(\tau)$, объекта $w_2(\tau)$ оптимальной системы и перепишем их с учетом систематических и случайных составляющих инструментальных ошибок:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_0^{T_1} w_1(\tau)\left\{R_{n_1}(t-\tau)+R_{u_1}(t-\tau)+\sigma^2_{c_1}+\right.\\
&\qquad\left.+\alpha\frac{\partial^2 R_{n_1}(t-\tau)}{\partial t\,\partial\tau}+\alpha\frac{\partial^2 R_{u_1}(t-\tau)}{\partial t\,\partial\tau}\right\}d\tau+\\
&+\int_0^{T_2} w_2(\tau)\left\{-R_{u_{12}}(t-\tau)-\alpha\frac{\partial^2 R_{u_{12}}(t-\tau)}{\partial t\,\partial\tau}\right\}d\tau=\\
&\qquad=\sum_{i=0}^{k_1}\gamma_{1i}t^i;\\
&\int_0^{T_2} w_2(\tau)\left\{R_{n_2}(t-\tau)+R_{u_2}(t-\tau)-(K_{c_1}-K_{c_2})\sigma^2_{c_2}+\right.\\
&\qquad\left.+\alpha\frac{\partial^2 R_{n_2}(t-\tau)}{\partial t\,\partial\tau}+\alpha\frac{\partial^2 R_{u_2}(t-\tau)}{\partial t\,\partial\tau}\right\}d\tau+\\
&+\int_0^{T_1} w_1(\tau)\left\{-R_{u_{21}}(t-\tau)-\alpha\frac{\partial^2 R_{u_{21}}(t-\tau)}{\partial t\,\partial\tau}\right\}dt=\\
&\qquad=\sum_{j=0}^{k_2}\gamma_{2j}t^j,
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.89}
$$

где

$$w_1(0)=0;\quad w_1(T_1)=0;$$

$$w_2(0)=0;\quad w_2(T_2)=0.$$

В уравнениях (4.89) принято, что случайные составляющие полезного сигнала отсутствуют, «шумы» n_1 и n_2 по первому и второму входам некоррелированы; R_u — корреляционные функции случайной в реализации инструментальной ошибки; σ_c^2 — дисперсия систематической ошибки, отнесенная к каждому входу; K_c — коэффициенты корреляции между каналами,

$$K_{c_2}=\sqrt{1-K^2_{c_1}}.$$

Инструментальные ошибки, приводимые к ложной команде, определяют порядок сигнала j по второму входу и параметры весовой функции $w_2(\tau)$.

Решение системы уравнений (4.89) в общем виде труда не представляет, но оно громоздко. Остановимся на частном случае.

Пусть

$$R_{n_1}(\tau)=N_{n_1}^2\,\delta(\tau);\quad R_{n_2}(\tau)=N_{n_2}^2\,\delta(\tau);$$

$$R_{u_1}(\tau)=N_u^2\,\delta(\tau);\quad R_{u_2}(\tau)=N_u^2\,\delta(\tau);$$

$$R_{u_{12}}(\tau)=R_{u_{21}}(\tau)=N_u^2 K_u\delta(\tau);$$

$$\sigma_{c_1}^2=\sigma_{c_2}^2=\sigma_c^2=\mathrm{const}.$$

Тогда система (4.89) приводится к виду

$$N_{n_1}^2 w_1(t)+N_u^2 w_1(t)+\sigma_c^2\int_0^{T_1} w_1(\tau)d\tau+\alpha N_{n_1}^2\frac{d^2w_1(t)}{dt^2}+$$

$$+\alpha N_u^2\frac{d^2w_1(t)}{dt^2}-K_u N_u^2 w_2(t)-\alpha N_u^2 K_u\frac{d^2w_2(t)}{dt^2}=\sum_{i=0}^{k_1}\gamma_{1i}t^i;$$

(4.90)

$$N_{n_2}^2 w_2(t)+N_u^2 w_2(t)-(K_{c_1}-K_{c_2})\,\sigma_c^2\int_0^{T_2} w_2(\tau)\,d\tau+$$

$$+\alpha N_{n_2}^2\frac{d^2w_2(t)}{dt^2}+\alpha N_u^2\frac{d^2w_2(t)}{dt^2}-K_u N_u^2 w_1(t)-$$

$$-\alpha N_u^2 K_u\frac{d^2w_1(t)}{dt^2}=\sum_{j=0}^{k_2}\gamma_{2j}t^j,$$

где $\int_0^T w(\tau)\,d\tau$ — момент нулевого порядка, который при фильтрации $=1$, при дифференцировании $=0$.

Положим

$$\int_0^{T_1} w_1(\tau)\,d\tau=\int_0^{T_2} w_2(\tau)\,d\tau=1,\ \text{т. е.}$$

считаем, что обе системы должны безошибочно воспроизводить постоянный сигнал. В этом случае получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\alpha\left(N_{n_1}^2+N_u^2\right)\frac{d^2w_1(t)}{dt^2}+\left(N_{n_1}^2+N_u^2\right)w_1(t)-\alpha N_u^2K_u\times$$
$$\times\frac{d^2w_2(t)}{dt^2}-N_u^2K_uw_2(t)=(\gamma_{10}-\sigma_c^2)+\gamma_{11}t+\ldots$$
$$\alpha\left(N_{n_2}^2+N_u^2\right)\frac{d^2w_2(t)}{dt^2}+\left(N_{n_2}^2+N_u^2\right)w_2(t)-\alpha N_u^2K_u\frac{d^2w_1(t)}{dt^2}-$$
$$-N_u^2K_uw_1(t)=\left[\gamma_{20}+(K_{c_1}-K_{c_2})\sigma_c^2\right]+\gamma_{21}t+\ldots \qquad (4.91)$$

Пусть $T_1<T_2$, $N_u\neq 0$.

Тогда, умножая первое равенство (4.91) на $\frac{(N_{n_2}^2+N_u^2)}{N_u^2K_u}$ и складывая его со вторым, получим уравнение относительно весовой функции $W_1(t)$:

$$\left[\frac{\alpha\left(N_{n_1}^2+N_u^2\right)\left(N_{n_2}^2+N_u^2\right)}{K_uN_u^2}-\alpha N_u^2K_u\right]\frac{d^2w_1(t)}{dt^2}+$$
$$+\left[\frac{\left(N_{n_1}^2+N_u^2\right)\left(N_{n_2}^2+N_u^2\right)}{K_uN_u^2}-N_u^2K_u\right]w_1(t)=$$
$$=\left[(\gamma_{10}-\sigma_c^2)+\gamma_{11}t+\ldots\right]\frac{(N_{n_2}^2+N_u^2)}{K_uN_u^2}+\gamma_{20}+$$
$$+(K_{c_1}-K_{c_2})\sigma_c^2+\gamma_{21}t+\ldots, \qquad (4.92)$$

откуда

$$w_1(t)=\left[B_0e^{\lambda_1t}+B_1e^{-\lambda_1t}+A_0+A_1t+\ldots\right]\times$$
$$\times\left[1(t)-1(t-T_1)\right]. \qquad (4.93)$$

Подставляя выражение (4.93) в одно из равенств (4.91), можно определить дифференциальное уравнение относительно $w_2(t)$ и, проинтегрировав его, функцию $w_2(t)$, которая имеет вид

$$w_2(t)=C_0e^{\lambda_2t}+C_1e^{-\lambda_2t}+D_0+D_1t+\ldots+\alpha K_u\frac{d^2w_1(t)}{dt^2}+$$
$$+w_1(t). \qquad (4.94)$$

Постоянные B_0, B_1, C_0, C_1, A_0, A_1, D_0, D_1 определяются из граничных условий

$$w_1(0)=0; \qquad w_1(T_1)=0;$$
$$w_2(0)=0; \qquad w_2(T_2)=0$$

и моментных условий

$$\int_0^{T_1} w_1(\tau)\,d\tau=1;$$

$$\int_0^{T_2} w_2(\tau)\,d\tau=1; \quad \int_0^{T_1} \tau w_1(\tau)\,d\tau=\mu_{11}; \quad \int_0^{T_2} \tau w_2(\tau)\,d\tau=\mu_{21};$$

λ_1 и λ_2 выражаются друг через друга и могут быть получены из условия обеспечения заданной дисперсии перегрузки объекта, т. е. через параметр α.

Рассмотрим числовой пример при следующих принятых условиях:

$$\alpha=0; \quad \int_0^{T_1} w_1(t)=1;$$

$$T_1<T_2; \quad \int_0^{T_2} w_2(t)=1;$$

$$\gamma_{11}=\gamma_{21}=\gamma_{12}=\gamma_{22}=\ldots=0; \quad w_1(t)=0 \;\; t>T_1; \quad t<0;$$
$$K_u=1; \qquad w_2(t)=0 \;\; t>T_2; \quad t<0.$$

В этом случае система дифференциальных уравнений (4.91) обращается в следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &(N_{n_1}^2+N_u^2)\,w_1(t)-N_u^2 w_2(t)=\gamma_{10}-\sigma_c^2 \\ &-N_u^2 w_1(t)+(N_{n_2}^2+N_u^2)\,w_2(t)= \\ &=\left[\gamma_{20}+\sigma_c^2\,(K_{c_1}-K_{c_2})\right], \end{aligned}\right\} \qquad (4.95)$$

решение которой имеет вид

$$w_1(t)=\frac{(\gamma_{10}-\sigma_c^2)\,(N_{n_2}^2+N_u^2)+\left[\gamma_{20}+\sigma_c^2(K_{c_1}-K_{c_2})\right]N_u^2}{N_{n_1}^2N_{n_2}^2+N_{n_2}^2N_u^2+N_{n_1}^2N_u^2}\times$$
$$\times[1(t)-1(t-T_1)]; \qquad (4.96)$$

$$w_2(t)=\frac{(N_{n_1}^2+N_u^2)\;w_1(t)-(\gamma_{10}-\sigma_c^2)}{N_u^2}. \qquad (4.97)$$

Постоянные γ_{10} и γ_{20} определяются из моментных условий:

$$\gamma_{10}=\frac{N_{n_1}^2}{T_2}+\sigma_c^2;$$

$$\gamma_{20}=\frac{T_2\left(N_{n_1}^2N_{n_2}^2+N_{n_2}^2N_u^2+N_{n_1}^2N_u^2\right)-T_1\left(N_{n_2}^2+N_u^2\right)}{N_u^2T_1T_2}-$$

$$-\sigma_c^2(K_{c_1}-K_{c_2}). \qquad (4.98)$$

Подставляя выражение (4.98) в формулы (4.96) и (4.97) получаем:

$$w_1(t)=\frac{1}{T_1}\left[1(t)-1(t-T_1)\right]; \qquad (4.99)$$

$$w_2(t)=\frac{(N_{n_1}^2+N_u^2)}{T_1N_u^2}\left[1(t)-1(t-T_1)\right]-\frac{N_{n_1}^2}{T_2N_u^2}. \qquad (4.100)$$

Как следует из выражений (4.99) и (4.100), весовые функции $w_1(t)$ и $w_2(t)$ не зависят от постоянной в реализации систематической ошибки.

Пролет системы от этой составляющей ошибки зависит от коэффициента корреляции K_{c_1} и может быть определен как

$$\bar{\sigma}_{R_c}^2=\sigma_c^2-\sigma_c^2(K_{c_1}-K_{c_2}). \qquad (4.101)$$

При

$$K_{c_1}\approx 1,\ K_{c_2}\approx 0,\ \bar{\sigma}_{R_c}^2\approx 0.$$

Этот случай в системах телеуправления может соответствовать станциям сопровождения цели и ракеты в одном луче или станциям с малым угловым рассогласованием между положением цели и наводимой ракеты [25].

При значительных упреждениях метода наведения систематические ошибки существенны.

Влияние случайных инструментальных ошибок на точность наведения может оказаться значительным при различных характеристиках весовых функций $w_1(t)$ и $w_2(t)$.

На рис. 4.18 и 4.19 соответственно приведены графики весовых функций в виде выражений (4.99), (4.100) и точностные характеристики системы, полученные для различных соотношений T_1/T_2 и уровней спектральных плотностей ошибок.

Из рис. 4.19 видно, что для фильтрации случайных ошибок при одинаковых уровнях ошибок во входных сигналах ($N_u^2=0$) целесообразно делать различное быстродействие систем. При существенных величинах инстру-

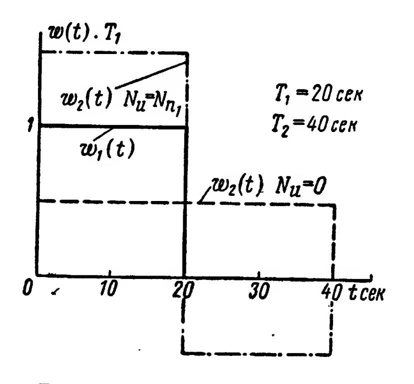


Рис. 4.18. Весовые функции двухполосной системы

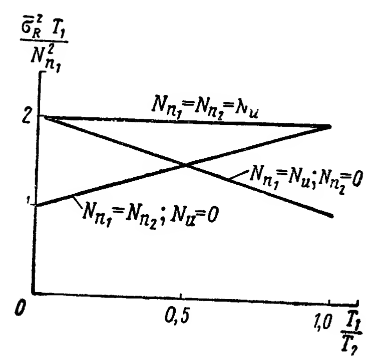


Рис. 4.19. Точностные характеристики двухполосной системы

ментальных случайных ошибок на частотах, определяющих быстродействие контура наведения, характеристики систем $w_1(t)$ и $w_2(t)$ должны быть близки. Приближение характеристик контуров по обоим входам требуют также инструментальные ошибки, приводимые к ложным ускорениям объекта, так как влияние последних на точность системы тем меньше, чем выше быстродействие замкнутого контура наведения.

4.6. ФОРМИРОВАНИЕ КОНТУРА УПРАВЛЕНИЯ РАКЕТЫ НА МАРШЕВОМ УЧАСТКЕ ПОЛЕТА

При формировании контуров телеуправления на маршевом участке полета может оказаться целесообразным использование оценки скорости ракеты $\tilde{v}$ [26]. Это имеет большое значение, во-первых, потому, что в системе стабилизации в каналах управления отсутствуют сильные обратные связи по ускорению, и скорость ракеты непосредственно определяет величину коэффициента усиления контура наведения. И, во-вторых, даже при наличии жестких обратных связей контуров стабилизации возникает необходимость компенсации продольных ус-

корений ракеты [24]. Однако использовать $\tilde{v}$ для управления достаточно сложно, так как вычисление скорости по априорным номинальным характеристикам ракеты и параметрам движения может привести к значительным систематическим ошибкам, а по замерам координат — к флюктуационным ошибкам. Замеры координат с флюктуационными ошибками приводят к уменьшению коэффициента усиления контура и, следовательно, увеличивают величину пролета ракетой цели. Если использовать скорость ракеты в виде априорно рассчитанной средней характеристики по режимам наведения, то при отсутствии стабилизации по ускорению возникает систематическая ошибка

$$\varepsilon_{\text{сист}} = f(v_{\text{р}}, \tilde{v}, \text{К}, j_{\text{р.н.}}), \qquad (4.102)$$

где $v_{\text{р}}$ — истинное значение скорости ракеты на маршевом участке полета;

$\tilde{v}$ — измеренное значение скорости на маршевом участке полета;

К — коэффициент усиления контура;

$j_{\text{р.н.}}$ — потребное значение ускорения ракеты на маршевом участке полета.

При использовании измерений координат скорость ракеты может быть определена как

$$\tilde{v} = f(\dot{x}^*, \dot{y}^*), \qquad (4.103)$$

где $\dot{x}^*$ и $\dot{y}^*$ — оценки производных измеряемых координат.

Если измеряемыми являются декартовые координаты x и y с ошибками в виде «белых шумов», то $\dot{x}^*$ и $\dot{y}^*$ в простейшем случае для реализации на аналоговых устройствах могут быть получены оптимальным дифференцированием x и y. Например, если x и y можно представить на интервале T в виде полинома первого порядка

$$\dot{x}^*(\dot{y}^*)[s] = \frac{2a^2 s}{(s+a)(s+2a)} \qquad (4.104)$$

и полинома второго порядка

$$\dot{x}^*\left(\dot{y}^*\right)[s]=\frac{(4\alpha^2 s+8\alpha^3)\,s}{(s+\alpha)(s+2\alpha)(s+4\alpha)}, \qquad (4.105)$$

$\alpha=f(T)$.

При измерении полярных координат ракеты

$$x=D\cos\varepsilon;\quad y=D\sin\varepsilon. \qquad (4.106)$$

$$\dot{x}=\dot{D}\cos\varepsilon-D\sin\varepsilon\cdot\dot{\varepsilon};\quad \dot{y}=\dot{D}\sin\varepsilon+D\cos\varepsilon\cdot\dot{\varepsilon}. \qquad (4.107)$$

Представляя D и ε на интервале T в виде полинома по времени, можно получить ε^*, D^*, $\dot{\varepsilon}^*$, $\dot{D}^*$ оптимальным сглаживанием и дифференцированием их измеренных значений.

Формула сглаживания для полинома первого порядка может быть представлена в виде

$$\varepsilon^*(D^*)[s]=\frac{3\alpha s+2\alpha^2}{(s+\alpha)(s+2\alpha)}; \qquad (4.108)$$

для полинома второго порядка —

$$\varepsilon^*(D^*)[s]=\frac{7\alpha s^2+14\alpha^2 s+8\alpha^3}{(s+\alpha)(s+2\alpha)(s+4\alpha)}. \qquad (4.109)$$

Дифференцирование ε и D производится аналогично (4.104) и (4.105).

Получив ε^*, $\dot{\varepsilon}^*$, D^*, $\dot{D}^*$ из выражения (4.107) определяем значения $\dot{x}^*$ и $\dot{y}^*$, а затем по формуле (4.103) — скорость объекта. Точность оценки скорости в рассмотренных вариантах может быть приближенно определена по линеаризованным выражениям (4.103) и (4.107).

При измерении декартовых координат объекта, линеаризуя выражение (4.103), получим

$$\bar{\sigma}_v^2\approx\left(\frac{\dot{x}_0}{v_0}\right)^2\frac{N_x^2}{\pi}\int_0^\infty|\Phi_{\dot{x}}(\omega)|^2\,d\omega+\left(\frac{\dot{y}_0}{v_0}\right)^2\frac{N_y^2}{\pi}\int_0^\infty|\Phi_{\dot{y}}(\omega)|^2\,d\omega, \qquad (4.110)$$

где $\Phi_{\dot{x}}$, $\Phi_{\dot{y}}$ — оптимальные дифференциаторы (4.104), (4.105);

N_x^2, N_y^2 — уровни «белых шумов» в координатах x и y;

$\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, v_0 — расчетные при номинальных условиях параметры траектории.

При измерении полярных координат ракеты ε и D с ошибками в виде некоррелированных «белых шумов» с уровнями N_ε^2 и N_D^2, линеаризуя выражения (4.107) и (4.103), получим

$$\bar{\sigma}_v^2 = \frac{1}{v_0^2}\Big\{(-\sin\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_0\dot{x}_0+\cos\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_0\dot{y}_0)^2\cdot\frac{N_D^2}{\pi}\int_0^\infty|\Phi_D(\omega)|^2 d\omega+$$

$$+(-\dot{D}_0\sin\varepsilon_0\dot{x}_0-D_0\cos\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_0\dot{x}_0+\dot{D}_0\cos\varepsilon_0\dot{y}_0-$$

$$-D_0\sin\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_0\dot{y}_0)^2\frac{N_\varepsilon^2}{\pi}\int_0^\infty|\Phi_\varepsilon(\omega)|^2 d\omega+$$

$$+(\dot{x}_0\cos\varepsilon_0+\dot{y}_0\sin\varepsilon_0)^2\frac{N_D^2}{\pi}\int_0^\infty|\Phi_{\dot{D}}(\omega)|^2 d\omega+$$

$$+(-D_0\sin\varepsilon_0\dot{x}_0+D_0\cos\varepsilon_0\dot{y}_0)^2\frac{N_\varepsilon^2}{\pi}\int_0^\infty|\Phi_{\dot{\varepsilon}}(\omega)|^2 d\omega+$$

$$+(-\sin\varepsilon_0\dot{x}_0\dot{\varepsilon}_0+\cos\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_0\dot{y}_0)(\dot{x}_0\cos\varepsilon_0+\dot{y}_0\sin\varepsilon_0)\times$$

$$\times\frac{N_D^2}{\pi}\int_0^\infty|\Phi_D(\omega)\Phi_{\dot{D}}(\omega)|d\omega+(-\dot{D}_0\sin\varepsilon_0\dot{x}_0-$$

$$-D_0\cos\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_0\dot{x}_0+\dot{D}_0\cos\varepsilon_0\dot{y}_0-D_0\sin\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_0\dot{y}_0)(-D_0\sin\varepsilon_0\dot{x}_0+$$

$$+D_0\cos\varepsilon_0\dot{y}_0)\frac{N_\varepsilon^2}{\pi}\int_0^\infty|\Phi_\varepsilon(\omega)\Phi_{\dot{\varepsilon}}(\omega)|d\omega\Big\}, \qquad (4.111)$$

где индексом «о» обозначены параметры опорной траектории.

Приведенные выше соотношения для определения скорости ракеты могут быть реализованы достаточно просто с помощью аналоговых устройств [27].

В системах наведения, использующих в качестве вычислителя управляющих команд цифровые машины, может быть применена более сложная обработка измеряемых координат с учетом нестационарности объекта, что во многих случаях может улучшить точность определения скорости.

Рассмотрим алгоритм определения скорости ракеты, построенный на основе цифрового фильтра Калмана [10].

Запишем уравнения скорости в проекциях на оси x и y:

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{g}{G(t)}\left\{T - \frac{s\varrho v^2}{2}\left(C_{x_0} + C_{x_{\text{ин}}}\right)\right\}\cos\theta \\ \dot{v}_y &= \frac{g}{G(t)}\left\{T - \frac{s\varrho v^2}{2}\left(C_{x_0} + C_{x_{\text{ин}}}\right)\right\}\sin\theta - g, \end{aligned}\right\} \quad (4.112)$$

де $C_{x_{\text{ин}}}$ — индуктивное сопротивление ракеты.

Сделаем допущения:

$$C_{x_0} \approx f_1(t)\frac{1}{v}; \quad (4.113)$$

$$C_{x_{\text{ин}}} \approx f_2(t)\alpha^2; \quad (4.114)$$

$$\cos\theta \approx f_3(t); \quad \sin\theta \approx f_4(t). \quad (4.115)$$

Выражение (4.113) в большинстве случаев выполнимо, так как характеристика C_{x_0} на ограниченном интервале хорошо аппроксимируется как k/v. Траекторные параметры могут быть заданы по расчетной точке встречи.

Так как угол атаки ракеты практически определить очень трудно, $C_{x_{\text{ин}}}$ целесообразно задавать априорно.

Задание выражений (4.115) в виде $f_3(t)$ и $f_4(t)$ позволяет полностью линеаризовать уравнения (4.112). Если траекторный угол θ вычислять по системе уравнений, описывающих движение объекта, получаемый алгоритм управления сильно усложняется и его трудно реализовать даже в ЦВМ, а выигрыш в точности при этом будет незначительным. Дело в том, что все равно необходимо

линеаризовать уравнения объекта и задаваться априорно значением α^2, а это связано с систематическими погрешностями системы, которых можно избежать только ограничением интервала наблюдения.

Перепишем уравнения (4.112) в линеаризованном виде

$$\dot{v}_x = -\xi_1(t)\cdot v_x + (T_н + \Delta T)\,\xi_2(t) - \xi_3(t)\,a^2; \quad (4.116)$$

$$\dot{v}_y = \xi_4(t)\,v_y + (T_н + \Delta T)\,\xi_5(t) - \xi_6(t)\,\alpha^2 - g. \quad (4.117)$$

$T_н$ — номинальное значение тяги двигателя объекта.

Уравнения (4.116) и (4.117) независимы, следовательно, алгоритмы определения v_x и v_y можно рассматривать изолированно.

Определим v_x, x и $\dot{v}_x$. $\dot{v}_x$ обычно определяют для нахождения момента отсечки тяги двигателя, прогнозирования траектории объекта и компенсации продольных ускорений.

Уравнение цифрового фильтра Калмана в векторной форме имеет вид [10]:

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}_{n/n} &= \Phi\hat{x}_{n-1/n-1} + P_{n/n}H^T R^{-1}\left[z_n - H\Phi\hat{x}_{n-1/n-1}\right] \\ P_{n/n} &= P_{n/n-1} - P_{n/n-1}H^T \times \\ &\times \left[HP_{n/n-1}H^T + R\right]^{-1} HP_{n/n-1}; \\ P_{n/n-1} &= \Phi P_{n-1/n-1}\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T. \end{aligned}\right\} \quad (4.118)$$

Определим в рассматриваемом случае матрицы, входящие в (4.118).

Напишем уравнение (4.116) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\dot{v}_x = \xi_2(t)\,\Delta T - \xi_1(t)\,v_x + T_н\xi_2(t) - \xi_3(t)\,\alpha^2; \quad (4.119)$$

$$\dot{x} = v_x.$$

Очевидно, что уравнение (4.116) могло быть расписано и в виде системы трех дифференциальных уравнений для определения $\dot{v}_x$, однако в этом случае существенно усложняются алгоритмы получения оценок координат. Учет же априорных сведений о модели ракеты при вычислении высоких производных мало эффективен.

Выделим из уравнения (4.119) опорное движение, т. е. движение при номинальной тяге двигателя $T_н$.

Тогда получим

$$\dot{v}_{x_1} = -\xi_1(t)\,v_{x_1} + \xi_2(t)\,\Delta T - \xi_3(t)\,\alpha^2, \qquad (4.120)$$

$$\dot{x}_1 = v_{x_1},$$

где v_{x_1} и x_1 — отклонения проекции скорости и координаты от их значений при невозмущенном движении с номинальной тягой двигателя.

Заменим производные координат их первыми разностями и приведем систему уравнений (4.120) к виду

$$v_{x_1 n+1} = [1 - \xi_1(t)\tau]\,v_{x_1 n} + \tau\xi_2(t)\,\Delta T - \tau\xi_3(t)\,\alpha^2. \qquad (4.121)$$

$$x_{1n+1} = x_{1n} + v_{x_1 n}\tau;$$

τ — дискретность замеров координаты.

Матрица объекта Φ системы уравнений (4.121) может быть представлена как

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1-\xi_1\tau & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.122)$$

Транспонированная матрица

$$\Phi^T = \begin{pmatrix} 1-\xi_1\tau & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.123)$$

Матрица дисперсий начальных условий

$$P_{00} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{v_{x_1}} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{x_1} \end{pmatrix}. \qquad (4.124)$$

Так как измеряется только координата x, матрицы H и H^T соответственно имеют вид

$$H = (0\ 1); \qquad (4.125)$$

$$H^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.126)$$

Матрица точности измерений и обратная матрица обращаются в числа:

$$R = \sigma^{*2}; \quad R^{-1} = \frac{1}{\sigma^{*2}}. \qquad (4.127)$$

Матрица $\Gamma Q \Gamma^T$ определяет увеличение дисперсионной матрицы $P_{n/n}$, а следовательно, и веса непосредственных измерений z_n при получении оценки за счет возмущений. В рассматриваемом случае к возмущениям сводятся

ошибки, связанные с допущениями (4.113÷4.115), а также разбросы тяги двигателя и угла атаки ракеты.

Учет возмущений практически эквивалентен ограничению интервала обработки измерений. Так как отмеченные возмущения определить достаточно сложно, целесообразно опустить в третьем уравнении (4.118) матрицу $\boldsymbol{\Gamma Q \Gamma}^T$, а по истечении времени T, при котором систематические ошибки в определяемых координатах еще не выходят из допустимых пределов, положить $\boldsymbol{P}_{n/n}=\text{const}$. В этом случае, наряду с ограничением T, существенно упрощается реализация фильтра при $t>T$.

Определим матрицы $\boldsymbol{P}_{n/n-1}$ и $\boldsymbol{P}_{n/n}$ в процессе насыщения фильтра, т. е. при $\boldsymbol{P}_{n/n}<\boldsymbol{P}_{\text{I}}=\text{const}$, характеризующей заданную «память» T:

$$\boldsymbol{P}_{n/n-1}=\Phi\boldsymbol{P}_{n-1/n-1}\Phi^T;$$

$$\boldsymbol{P}_{1/0}=\Phi\boldsymbol{P}_{0/0}\Phi^T.$$

Перемножая выражения (4.122), (4.124) и (4.123), получаем

$$\boldsymbol{P}_{1/0}=\begin{pmatrix}\sigma^2_{v_{x_1}}\ (1-\xi_1\tau) & 0\\ \tau\sigma^2_{v_{x_1}} & \sigma^2_{x_1}\end{pmatrix}. \qquad (4.128)$$

Матрица $\boldsymbol{P}_{1/1}$ определяется как

$$\boldsymbol{P}_{1/1}=\boldsymbol{P}_{1/0}-\boldsymbol{P}^2_{1/0}k_{1/1}=\boldsymbol{P}_{1/0}[1-\boldsymbol{P}_{1/0}k_{1/1}], \qquad (4.129)$$

где

$$k_{1/1}=\frac{1}{\tau^2\sigma^2_{v_{x_1}}+\sigma^2_{x_1}+\sigma^{*2}}.$$

$k_{n/n}$ — частное от деления единицы на сумму элемента C_{22} матрицы $\boldsymbol{P}_{n/n-1}$ и дисперсии измерения координаты x;

$$C_{22}=\tau^2 b_{11}+b_{22};$$

b_{11} и b_{22} — диагональные элементы матрицы $\boldsymbol{P}_{n-1/n-1}$.

Так как в рассматриваемом случае измеряется только координата x, произведение матриц $\boldsymbol{H\Phi}\hat{\boldsymbol{x}}_{n-1/n-1}$ обращается в число

$$\boldsymbol{H\Phi}\hat{\boldsymbol{x}}_{n-1/n-1}=\tau\hat{v}_{x_1\,n-1/n-1}+\hat{x}_{1\,n-1/n-1}.$$

На первом шагу вычислений

$$\hat{v}_{x_1 \%} = v_{x_1 0}$$

$$R^{-1} = \frac{1}{\sigma^{*2}}$$

$$\hat{x}_{1\%} = x_{1 0}$$

Матрица $P_{n/n}H^T$ является матрицей-столбцом, элементы которой равны элементам второго столбца матрицы $P_{n/n}$.

Матрица $\Phi\hat{x}_{n-1/n-1}$ также является матрицей-столбцом:

$$\Phi\hat{x}_{n-1/n-1} = \begin{pmatrix} (1-\xi_1\tau)\hat{v}_{x_1 n-1/n-1} \\ \tau\hat{v}_{x_1 n-1/n-1} + \hat{x}_{1 n-1/n-1} \end{pmatrix}. \qquad (4.130)$$

Проводя суммирование по формуле (4.118), можно определить оценки v_{x_1} и x_1 на каждом шагу вычислений.

При $\xi_1 = \text{const}$ и $P_{n/n} = P_{\text{I}} = \text{const}$ получаем обычные стационарные цифровые фильтры Винера.

В этом случае

$$\hat{X}_{1 n/n} = \begin{pmatrix} (1-\xi_1\tau)\hat{v}_{x_1 n-1} + \alpha_{12}(x_{1 n} - \tau\hat{v}_{x_1 n-1} - \hat{x}_{1 n-1}) \\ \tau\hat{v}_{x_1 n-1} + \hat{x}_{1 n-1} + \alpha_{22}(x_{1 n} - \tau\hat{v}_{x_1 n-1} - \hat{x}_{1 n-1}) \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12} = \frac{P_{\text{I}_{12}}}{\sigma^{*2}}; \qquad \alpha_{22} = \frac{P_{\text{I}_{22}}}{\sigma^{*2}}; \qquad (4.131)$$

или

$$\hat{x}_{1 n} = \alpha_{22}x_{1 n} + (\alpha_{12}\tau - \alpha_{22} + \alpha_{22}\xi_1\tau)\, x_{1 n-1} +$$

$$+ (2 - \xi_1\tau - \alpha_{12}\tau - \alpha_{22})\,\hat{x}_{1 n-1} - (1 - \alpha_{22} - \xi_1\tau + \alpha_{22}\xi_1\tau)\,\hat{x}_{1 n-2}. \qquad (4.132)$$

$$\hat{v}_{x_1 n} = \alpha_{12}(x_{1 n} - x_{1 n-1}) + (2 - \xi_1\tau - \alpha_{12}\tau - \alpha_{22})\,\hat{v}_{x_1 n-1} -$$

$$-(1 - \xi_1\tau - \alpha_{22} + \alpha_{22}\xi_1\tau)\,\hat{v}_{x_1 n-2}.$$

На рис. 4.20 приведена структурная схема получения оценок скорости объекта v_x и координаты x. $x_{\text{н}}$, $v_{\text{н}}$ — координата x и скорость v_x, вычисляемые при номинальных параметрах тяги двигателя.

Таким образом, координаты v_x и x определены. Аналогично могут быть вычислены v_y и y.

Следует отметить, что реализация цифрового фильтра описанным выше способом на отрезке времени, при котором $P_{n/n} > P_I$, т. е. при нарастании памяти до заданного значения T, может оказаться неприемлемой из-за больших флюктуационных ошибок в определяемой величине и как следствие в пролетах и перегрузках объекта.

В этом случае целесообразно форсировать выход фильтра на режим $P_{n/n} = P_I$, например, способом, описанным в 4.3.

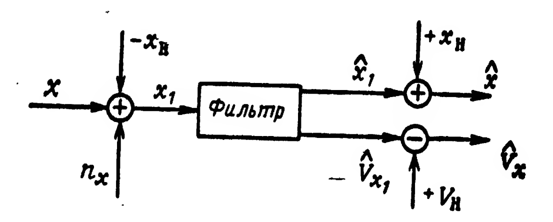


Рис. 4.20. Блок-схема определения оценок координаты и скорости объекта

Тогда скорость объекта определится как

$$\hat{v}_{x_1 1} = 0; \qquad \hat{v}_{x_1 2} = v_{x_1 2};$$

$$\hat{v}_{x_1 3} = v_{x_1 3}\tau\alpha_{12} + (2 - \xi_1\tau - \alpha_{12}\tau - \alpha_{22}) v_{x_1 2} - $$
$$ - (1 - \xi_1\tau - \alpha_{22} + \alpha_{22}\xi_1\tau)(2v_{x_1 2} - v_{x_1 3})$$

и далее по формуле (4.132).

При такой реализации оптимального фильтра дисперсия оценки v_{x_1} значительно быстрее достигает своего установившегося значения. Однако, если при получении оценки v_{x_1} по формуле (4.132) практически отсутствуют систематические ошибки, в этом случае они значительны и близки в начальный момент дисперсии измерений. За время T эти ошибки система отрабатывает.

Выше уже говорилось, что в объектах со слабыми обратными связями по ускорениям от скорости объекта непосредственно зависит коэффициент усиления системы.

Случайные ошибки измерения x и y через $\tilde{v}$ могут привести к появлению случайной составляющей коэффициента усиления системы K. Дисперсии пролета и уско-

рения ракеты могут быть в этом случае приближенно оценены по соотношениям (4.73), (4.74).

При наличии в системе стабилизации ракеты сильных обратных связей по ускорениям это влияние существенно меньше.

Одной из основных особенностей рассматриваемого класса ракет является наличие при управлении больших продольных ускорений j_x. Влияние j_x на ускорение в плоскости управления в системах наведения достаточно точно может быть определено как

$$j_{p\,x}=\dot{v}_p \sin(\theta_p-\varepsilon_0); \tag{4.133}$$

ε_0 — угол, определяющий направление в фактическую точку встречи.

При этом j_{px} в зависимости от знака $\dot{v}$ приводит к увеличению или уменьшению j_p, что связано с перерегулированиями, либо с затягиванием переходных процессов отработки входных сигналов. Если в системах самонаведения компенсация влияния j_{px} легко осуществима, так как реализуется по измеренным на борту продольной перегрузке и углу пеленга, в системах теленаведения необходимо на земле вычислять $\dot{v}_p$ и θ_p, что связано с дифференцированием координат.

Выше рассматривались алгоритмы получения скорости. Траекторный угол ракеты определяется как

$$\theta_p=\operatorname{arctg}\frac{v_y}{v_x}\approx\frac{v_y}{v_x}. \tag{4.134}$$

Ускорение ракеты может быть получено дифференцированием оценки скорости или непосредственно двойным дифференцированием измеряемых координат.

Следует отметить, что компенсация продольного ускорения, даже если она выполнена достаточно точно, требует дополнительных перегрузок, что снижает качество управляемости. Если потребовать, чтобы ракета наводилась в фактическую точку встречи, продольное ускорение влиять не будет, так как в этом случае

$$\theta_p=\varepsilon_0.$$

Вычисление фактической точки встречи связано с пролонгацией и совместным решением уравнений движения цели и ракеты.

Для цели прогнозированные значения ее декартовых координат могут быть определены экстраполяцией их на момент встречи $t_к$, т. е.

$$x_{цк} = \overset{*}{x}_ц + \dot{\overset{*}{x}}_ц (t_к - t) + \frac{1}{2} \ddot{\overset{*}{x}}_ц (t_к - t)^2 + \ldots, \qquad (4.135)$$

где $\overset{*}{x}_ц$, $\dot{\overset{*}{x}}_ц$, и т. д. — оптимально вычисленные фазовые координаты цели.

Повидимому, целесообразно ограничиться двумя членами выражения (4.135), так как вычисление более высоких производных связано с большими случайными ошибками. Маневр цели вызовет дополнительную потребную перегрузку объекта, однако углы ($\theta_р - \varepsilon_0$) при этом, как правило, невелики.

Непосредственное совместное решение уравнений движения цели и ракеты приводит к итерационным процессам вычислений, а потому нежелательно.

Рассмотрим следующий способ прогнозирования движения ракеты и определения оставшегося до точки встречи времени $t_к - t$. Перед стартом, решая совместно уравнения $D_ц(t)$ и $D_р(t)$ и используя номинальные характеристики объекта, определяем предполагаемое полетное время $t_к$ до точки встречи. При этом могут быть использованы численные методы интегрирования уравнений движения.

В процессе наведения уточняется оставшееся время $t_к - t$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta t_{к\,i} &= \frac{\Delta D_{к\,i}}{v_{сбл.ср\,i}}, \\ t_{к\,i} &= t_{к\,(i-1)} + \Delta t_{к\,i}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.136)$$

где $\Delta D_{к\,i}$ — разность прогнозируемых дальностей цели и объекта на время $t_{к\,(i-1)} - t$;

$v_{сбл.ср}$ — средняя скорость сближения.

Прогнозируемые значения дальностей цели и ракеты определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} D_{цпр} &= \overset{*}{D}_{ц\,i} + \dot{\overset{*}{D}}_{ц\,i} (t_{k(i-1)} - t) + \frac{\ddot{\overset{*}{D}}_{ц\,i}}{2} (t_{к\,(i-1)} - t)^2 + \ldots; \\ D_{р\,пр} &= D_{р\,i} + \int\limits_{t_i}^{t_{к(i-1)}} v_{р\,i} dt + \ldots \end{aligned}\right. \qquad (4.137)$$

Скорость объекта уточняется относительно номинальных значений по текущим измерениям. Точность вычисления практически целиком определяется точностью определения тяги двигателя T.

Начальная дальность D_{pi} и тяга T_i ракеты вычисляются изложенным выше способом.

$G(t)$, $\theta(t)$, $\varrho(t)$, $C_{x_{\text{ин}}}(t)$ целесообразно программировать по времени в зависимости от траектории движения при номинальных параметрах. На конечном участке наведения будем переходить на вычисление полетного времени по упрощенной зависимости

$$t_{\text{к}}-t=\frac{\Delta D}{|\Delta \dot{D}|},$$

так как, если на начальном участке ошибки в определении $t_{\text{к}}$ на точность системы влияют косвенно через дополнительные перегрузки объекта, в конце наведения они непосредственно определяют пролеты.

В уравнении (4.112) C_{x_0} и $C_{x_{\text{ин}}}$ в основном влияют на характеристики объекта. Составляющая сопротивления C_{x0} связана с заданной траекторией движения объекта. Индуктивное сопротивление $C_{x\,\text{ин}}$ зависит от управления объектом при выполнении заданной траектории и может достигать существенных значений. При заданном методе наведения определение управления с учетом интегральных ограничений приводит к минимизации индуктивного сопротивления объекта. Поэтому целесообразно уменьшать индуктивное сопротивление ракеты [14].

Глава V

УЧЕТ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ СИСТЕМ ТЕЛЕУПРАВЛЕНИЯ

5.1. ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ В СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЕ НАВЕДЕНИЯ

Как рассматривалось в гл. 1, цель располагает двумя возможностями воздействия на систему наведения: изменением динамических характеристик собственного движения (маневра) и созданием помех, искажающих полезную информацию [22].

Воздействие на систему управления маневра цели может быть учтено, если рассматривать уравнения объекта управления в виде

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{v}+\xi,\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0. \qquad (5.1)$$

Управление цели $\boldsymbol{v}$ является в общем случае вектором $(m\times 1)$, удовлетворяющим условиям (гл. I)

$$\boldsymbol{v}\in V \qquad (5.2)$$

и

$$M\left[\int_{t_0}^{t_в}\boldsymbol{v}^T Q_v\boldsymbol{v}\,dt\right]\leqslant C_v. \qquad (5.3)$$

Предположим, что цель располагает лишь априорной информацией о характеристиках системы наведения. В этом случае $\boldsymbol{v}(t)$ не зависит от реализации случайных воздействий на систему наведения и может рассматриваться как неслучайная функция времени. При этом ограничение (5.3) примет вид

$$\left[\int_{t_0}^{t_в}\boldsymbol{v}^T Q_v\boldsymbol{v}\,dt\right]\leqslant C_v. \qquad (5.4)$$

Рассматривая линейные задачи, предположим также, что действие помех, создаваемых целью, сводится к изменению ошибок $\boldsymbol{n}(t)$ в измеряемом наводящимся объектом векторе $\boldsymbol{z}(l\times 1)$:

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{n}(t). \tag{5.5}$$

Если цель и в данном случае действует только на основе априорной информации, она выбирает статистические характеристики $\boldsymbol{n}(t)$. При этом ограничена дисперсия (мощность) создаваемой целью помехи

Рис. 5.1. Структурная схема системы наведения

$$M\left[\boldsymbol{n}^T(t)\,\boldsymbol{n}(t)\right]\leqslant D_m. \tag{5.6}$$

В стационарном случае условие (5.6) может быть представлено через спектральную плотность $n(t)$, равную $s_n(\omega)$, в виде

$$\int\limits_0^\infty S_n(\omega)\,d\omega\leqslant D_m. \tag{5.7}$$

Предположим, что цель выбором помехи $n(t)$ и управления $\boldsymbol{v}$ стремится максимизировать

$$I=M\left[\boldsymbol{x}^T(t_\text{в})\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t_\text{в})\right] \tag{5.8}$$

при условии, что эти функции удовлетворяют ограничениям (5.6), (5.2) и (5.3). Объект (5.1) и систему наведения будем предполагать стационарными, $\xi(t)=0$.

Структурная схема системы приведена на рис. 5.1. Обозначим через $\boldsymbol{Q}_n(t-\tau)$ матрицу импульсных переходных функций замкнутой системы (рис. 5.1) от входа $\boldsymbol{n}(t)$ до $\boldsymbol{x}(t)$, а через $\boldsymbol{Q}_v(t-\tau)$ — от входа $\boldsymbol{v}(t)$ до $\boldsymbol{x}(t)$.

Тогда

$$x(t_в)=\int_{t_0}^{t_в} Q_v(t_в-\tau) B_v v(\tau) d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t_в} Q_n(t_в-\tau) n(\tau) d\tau + Q_v(t_в-t_0) x(t_0). \qquad (5.9)$$

Управление $v(t)$ предполагается неслучайным, а $n(t)$ не коррелировано с начальными условиями. Подставляя (5.9) в (5.8), получим, что I состоит из 3 слагаемых, одно из которых зависит только от $v(t)$, второе от $n(t)$, а третье определяется x_0 и не зависит от цели.

Таким образом,

$$I=I_1+I_2+I_3, \qquad (5.10)$$

где

$$I_1=\left[x_v^T(t_в) P x_v(t_в)\right]; \qquad (5.11)$$

$$x_v(t_в)=\int_{t_0}^{t_в} Q_v(t_в-\tau) B_v v(\tau) d\tau; \qquad (5.12)$$

$$I_2=\int_0^{t_в-t_0} d\tau \int_0^{t_в-t_0} d\lambda Q_n(\tau) R_n(t_в-\tau,\ t_в-\lambda) Q_n^T(\lambda); \qquad (5.13)$$

$$R_n(t_1, t_2)=M\left[n(t_1) n^T(t_2)\right]; \qquad (5.14)$$

$$I_3=Q_v(t_в-t_0) D_{x_0} Q_v^T(t_в-t_0); \qquad (5.15)$$

$$D_{x_0}=M\left[x(t_0) x^T(t_0)\right]. \qquad (5.16)$$

Рассмотрим сначала задачу определения статистических характеристик помех $n(t)$, максимизирующих (5.8). На основании (5.10) задача сводится к выбору корреляционной функции $R_n(t_1, t_2)$ (5.14), максимизирующей (5.13) при известной матрице импульсных переходных функций системы $Q_n(\tau)$.

Будем рассматривать для простоты одномерный случай и предположим, что $n(t)$ является стационарным процессом, а $t_0=-\infty$, т. е. в системе имеет место установившийся процесс. В этом случае I_2 может быть выражен через передаточную функцию $Q_n(j\omega)$ системы и спектральную плотность помех $n(t)$:

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty} |Q_n(j\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega. \qquad (5.17)$$

Поскольку функция под интегралом является четной, то

$$I_2 = 2\int_0^\infty |Q_n(j\omega)|^2 S_n(\omega)\, d\omega. \qquad (5.18)$$

Условие (5.6) в этом случае может быть записано в виде (5.7)

$$\int_0^\infty S_n(\omega)\, d\omega \leqslant D_m. \qquad (5.19)$$

Кроме того, из определения спектральной плотности как мощности процесса следует, что

$$S_n(\omega) \geqslant 0. \qquad (5.20)$$

Применяя детерминированный принцип максимума к функционалу (5.18), получим, что максимум I_2 достигается на $S_n(\omega)$, минимизирующей функцию H:

$$\min_{S_n} H = \min_{S_n} - |Q_n(j\omega)|^2 S_n(\omega). \qquad (5.21)$$

Поскольку $|Q_n(j\omega)|^2 > 0$, то минимум H при условии (5.20) достигается на границе и ограничение (5.19) со знаком равенства должно учитываться при решении задачи.

С учетом (5.19) задача сводится к определению $S_n(\omega)$ из условия

$$\min_{S_n} H = \min_{S_n} - [|Q_n(j\omega)|^2 S_n(\omega) + \psi S_n(\omega)], \qquad (5.22)$$

где $\psi = \text{const}$. Если $S_n(\omega)$ не ограничена, то задача не имеет единственного решения. В частности, можно предположить, что максимум I_2 будет достигаться при условии, что

$$S_n(\omega) = C\,\delta(\omega - \omega_m), \qquad (5.23)$$

где значение ω_m определяется равенством

$$|Q_n(j\omega_m)|^2 = \max_{\omega} |Q_n(j\omega)|^2. \qquad (5.24)$$

В этом случае помеха представляет собой гармоническое воздействие на частоте, соответствующей максимальному значению амплитудной характеристики контура наведения. Фаза гармоники является случайной, а ам-

плитуда $C=D_n$. Для исключения δ-функций в решении можно вместо (5.19) задать ограничение в виде

$$\int_0^\infty S_n^2(\omega)\, d\omega \leqslant D_{n_1}. \tag{5.25}$$

В этом случае имеем

$$\min_{S_n} H = \min_{S_n} - \left[|Q_n(j\omega)|^2 S_n + \psi S_n^2\right]. \tag{5.26}$$

Дополняя (5.26) до полного квадрата, при $\psi<0$ получим

$$S_n = \frac{1}{2}\,\frac{|Q_n(j\omega)|^2}{|\psi|}. \tag{5.27}$$

Подставляя (5.27) в (5.25), получим

$$S_n = \sqrt{D_{n_1}}\,\frac{|Q_n(j\omega)|^2}{\sqrt{\int_0^\infty |Q_n(j\omega)|^4\, d\omega}}. \tag{5.28}$$

В этом случае $S_n(\omega)$ совпадает по форме с амплитудной характеристикой системы наведения.

Рассмотрим далее случай, когда наряду с выражением (5.19) ограничена величина спектральной плотности, т. е.

$$0 \leqslant S_n(\omega) \leqslant S_{max}. \tag{5.29}$$

В этом случае S_n определяется из формулы (5.22) при условиях (5.29). Оптимальная величина S_n равна

$$S_n(\omega) = \begin{cases} S_{max}, & \text{если } \left[|Q_n(j\omega)|^2 + \psi\right] > 0 \\ 0, & \text{если } \left[|Q_n(j\omega)|^2 + \psi\right] \leqslant 0, \end{cases} \tag{5.30}$$

где постоянная $\psi<0$ определяется из условия (5.19).

В частности, если $|Q_n(j\omega)|^2$ монотонно убывающая функция, то существует одно значение $\omega=\omega_c$, при котором (5.30) меняет знак. Это значение частоты определяется из условия

$$\int_0^{\omega_c} S_{max}\, d\omega = D_n, \tag{5.31}$$

откуда

$$\omega_c = \frac{D_n}{S_{max}}. \tag{5.32}$$

При этом

$$\psi = -\left|Q_n\left(j\frac{D_n}{S_{\max}}\right)\right|^2. \quad (5.33)$$

Если $|Q_n(j\omega)|^2$ имеет максимум на частоте ω_m, то интервал частот $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, на котором помеха отлична от нуля, содержит ω_m и равен

$$\Delta\omega = \frac{D_n}{S_{\max}}. \quad (5.34)$$

Значения ω_1 и ω_2 определяются как точки пересечения прямой, параллельной оси абсцисс, с графиком $|Q_n(j\omega)|^2$, отстоящие друг от друга на величину $\Delta\omega$.

Таким образом, с учетом ограничений формул (5.29) и (5.19) спектральная плотность помехи равна максимальной величине на интервале частот наибольшего усиления контура наведения, длина которого определяется условием (5.19).

Рассмотрим теперь задачу определения маневра цели $v(t)$ максимизирующего выражение (5.8) при ограничениях, заданных формулами (5.2), (5.4) и при условии, что известна матрица весовых функций системы наведения $Q_v(\tau)$. На основании условия (5.10) эта задача сводится к выбору функции времени $\boldsymbol{v}(t)$, максимизирующей I_1, и может быть решена при помощи детерминированного принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Поскольку управление $\boldsymbol{v}(t)$, обеспечивающее максимум I_1, одновременно обеспечивает минимум $-I_1$, будем рассматривать условия минумума

$$-I_1 = -\boldsymbol{x}_v^T(t_в)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_v(t_в) \quad (5.35)$$

при условиях (5.2) и (5.4).

Обозначим

$$\boldsymbol{x}_v(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{Q}_v(t_в - \tau)\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{v}(\tau)\,d\tau. \quad (5.36)$$

Отсюда

$$\frac{d\boldsymbol{x}_v}{dt} = \boldsymbol{Q}_v(t_в - t)\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{v}(t), \quad \boldsymbol{x}_v(t_0) = 0. \quad (5.37)$$

На основании правила множителей Лагранжа получим, что минимум (5.35) достигается на управлениях, обеспечивающих максимум функции H:

$$H = \psi^T\boldsymbol{Q}_v(t_в - t)\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{v}(t) + \psi_{n+2}\boldsymbol{v}^T\varrho_v\boldsymbol{v}, \quad (5.38)$$

где ψ_{n+2} определяется из условия (5.4), а вектор сопряженных функций $\boldsymbol{\psi}(n\times1)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt}=0 \qquad (5.39)$$

при конечных условиях

$$\left.\begin{aligned}\psi_0(t_{\text{в}})&=1\\ \boldsymbol{\psi}(t_{\text{в}})&=2\boldsymbol{Px}(t_{\text{в}}).\end{aligned}\right\} \qquad (5.40)$$

Отсюда $\boldsymbol{\psi}(t)=\text{const}$ и (5.38) может быть записано в виде

$$H=2\boldsymbol{x}^T(t_{\text{в}})\boldsymbol{PQ}_v(t_{\text{в}}-t)\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{v}(t)+\psi_{n+2}\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{\varrho}_v\boldsymbol{v}. \qquad (5.41)$$

Можно показать, что управление $\boldsymbol{v}(t)$, максимизирующее H при условии (5.2) максимизирует

$$\max_{v\in V}H_v=\max_{v\in V}\psi_{n+2}\left[\boldsymbol{v}^T+\frac{1}{\psi_{n+2}}\boldsymbol{x}_v^T(t_{\text{в}})\boldsymbol{PQ}_v(t_{\text{в}}-t)\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{\varrho}_v^{-1}\right]\times$$

$$\times\boldsymbol{\varrho}_v\left[\boldsymbol{v}+\frac{1}{\psi_{n+2}}\boldsymbol{\varrho}_v^{-1}\boldsymbol{B}_v^T\boldsymbol{Q}_v^T(t_{\text{в}}-t)\boldsymbol{Px}_v(t_{\text{в}})\right]. \qquad (5.42)$$

При положительно-определенной матрице ϱ_v максимум (5.42) имеет место при $\psi_{n+2}<0$.

Если область V представляет собой такой m-мерный куб, что компоненты v_i независимы, максимум (5.42) достигается на управлениях

$$\boldsymbol{v}(t)=-Sg\frac{1}{\psi_{n+2}}\boldsymbol{\varrho}_v^{-1}\boldsymbol{B}_v^T\boldsymbol{Q}_v^T(t_{\text{в}}-t)\boldsymbol{Px}_v(t_{\text{в}}), \qquad (5.43)$$

где обозначено

$$SgX=\left\{\begin{matrix}X & \text{при } |X|\leqslant V_{\max}\\ V_{\max} & \text{при } |X|>V_{\max},\end{matrix}\right\} \qquad (5.44)$$

$V_{\max}$ — длина ребра куба.

Векторное уравнение (5.43) формально выражает связь между компонентами векторов слева и справа от знака равенства при $V_{\max}=V_{\max\,i}$.

При отсутствии ограничения (5.4) $\psi_{n+2}=0$ и оптимальное управление $v(t)$ определяется уравнением

$$\boldsymbol{v}^*(t)=V_{\max}\,\text{sign}\,\boldsymbol{B}_v^T\boldsymbol{Q}_v^t\boldsymbol{Q}^T(t_{\text{в}}-t)^*\boldsymbol{Px}_v^r(t_{\text{в}}), \qquad (5.45)$$

которое понимается как равенство компонента векторов в левой и правой частях.

При отсутствии ограничения (5.2) из формулы (5.43) получаем

$$v(t) = -\frac{1}{\psi_{n+2}} \varrho_v^{-1} B_v^T Q_v^T (t_{\text{в}} - t) P x_v (t_{\text{в}}). \qquad (5.46)$$

Рассмотрим решение уравнений (5.45) и (5.46) в одномерном случае ($n=m=1$) при $P>0$. Подставляя выражения (5.45) в формулы (5.12), получаем при $n=m=1$, что $x(t_{\text{в}})>0$. Отсюда

$$v(t) = V_{\max} \operatorname{sign} B_v Q_v (t_{\text{в}} - t). \qquad (5.47)$$

Следовательно, при ограничении (5.2) управление цели, максимизирующее квадрат ошибки, принимает значения на границе допустимой области и является релейным.

Для определения множителя Лагранжа ϱ_v подставим его в выражение (5.4). В одномерном случае получим, что $\psi_{n+2}<0$, при котором имеет место максимум (5.42), равно

$$\psi_{n+2} = -\sqrt{\frac{\int\limits_{t_0}^{t_{\text{в}}} \frac{1}{\varrho_v} B_v^2 Q_v^2 (t_{\text{в}} - t)\, dt}{C_v}}\, P |x_v (t_{\text{в}})|. \qquad (5.48)$$

Отсюда (5.46) в одномерном случае примет вид

$$v(t) = \sqrt{\frac{C_v}{\int\limits_{t_0}^{t_{\text{в}}} \frac{1}{\varrho_v} B_v^2 Q_v^2 (t_{\text{в}} - t)\, dt}}\, \frac{B_v Q (t_{\text{в}} - t)}{\varrho_v} \operatorname{sign} x(t_{\text{в}}). \qquad (5.49)$$

Подставляя далее выражение (5.49) в формулу (5.12), получаем окончательно оптимальное управление цели при ограничении (5.4) в виде

$$v(t) = \sqrt{\frac{C_v}{\int\limits_{t_0}^{t_{\text{в}}} \frac{1}{\varrho_v} B_v^2 Q_v^2 (t_{\text{в}} - t)\, dt}}\, \frac{B_v Q_v (t_{\text{в}} - t)}{\varrho_v}. \qquad (5.50)$$

В общем случае при ограничениях (5.2) и (5.4) задача решается аналогично. Подставляя управление (5.43)

в одномерном случае в выражения (5.4) и (5.12), получаем

$$v(t)=Sg\,\frac{\Lambda}{\varrho_v}\,B_v Q_v(t_{\text{в}}-t),$$

где $\Lambda=\text{const}>0$ и определяется из уравнения

$$\int_{t_0}^{t_{\text{в}}}\varrho_v\left[Sg\,\frac{\Lambda}{\varrho_v}\,B_v Q_v(t_{\text{в}}-t)\right]^2 dt=C_v.$$

Полученные оптимальные управления $v(t)$ (5.47) и (5.50), обеспечивающие максимум среднего квадрата ошибки наведения, принимают значения на границах областей, определяемых ограничениями (5.2) и (5.4), и зависят от характера этих ограничений.

5.2. ИГРОВАЯ ЗАДАЧА С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Рассмотрим задачу наведения с известным моментом встречи $t_{\text{в}}$ и целью, выбирающей свое управление $\boldsymbol{v}(m\times1)$ из условия максимума математического ожидания квадратичной формы координат объекта $\boldsymbol{x}$

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\xi},\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \qquad (5.51)$$

в момент времени $t_{\text{в}}$. Управление $\boldsymbol{u}$ наводящегося объекта, как и ранее, минимизирует

$$I=M\left[\boldsymbol{x}^T(t_{\text{в}})\boldsymbol{P}(t_{\text{в}})\boldsymbol{x}(t_{\text{в}})\right]. \qquad (5.52)$$

Предположим, что $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ используют для управления вектора $\boldsymbol{z}_u(t)$, $(l\times1)$ и $\boldsymbol{z}_v(t)$, $(k\times1)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}_u(t)&=\boldsymbol{C}_u\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{n}_u(t),\\ \boldsymbol{z}_v(t)&=\boldsymbol{C}_v\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{n}_v(t),\end{aligned} \qquad (5.53)$$

т. е.

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(z_{u0}^t,\ t), \qquad (5.54)$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(z_{v0}^t,\ t), \qquad (5.55)$$

где, как и ранее, $\boldsymbol{z}_0^t$ — совокупность значений вектора $z(\tau)$, $t_0\leqslant\tau\leqslant t$.

Предположим, как и в гл. III, что $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ удовлетворяют условиям

$$M\left[\int_{t_0}^{t_в} \boldsymbol{u}^T Q_u \boldsymbol{u} dt\right] \leqslant C_u, \tag{5.56}$$

$$M\left[\int_{t_0}^{t_в} \boldsymbol{v}^T Q_v \boldsymbol{v} dt\right] \leqslant C_v. \tag{5.57}$$

Рассматриваемая игра двух лиц является игрой с неполной информацией, поскольку управления u и v являются операторами только z_u и z_v, а не координат x объекта.

Будем искать решение этой задачи в чистых стратегиях и предполагать, что правило множителей Лагранжа выполняется.

Таким образом, определение оптимального поведения $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ сводится к нахождению экстремумов функционала согласно 2.5:

$$I = \boldsymbol{x}^T(t_в) \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}(t_в) + \psi_{n+z}^v \int_{t_0}^{t_в} \boldsymbol{v}^T Q_v \boldsymbol{v} dt + \\ + \psi_{n+2}^u \int_{t_0}^{t_в} \boldsymbol{u}^T Q_n \boldsymbol{u} dt. \tag{5.58}$$

Согласно выражениям (2.157) и (2.158) необходимым условием экстремума (5.58) являются условия

$$\max_{\boldsymbol{u}} M\{H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0, t \mid \boldsymbol{z}_{u0}^t\} = 0, \tag{5.59а}$$

$$\min_{\boldsymbol{v}} M\{H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}, t) \mid \boldsymbol{z}_{v0}^t\} = 0, \tag{5.59б}$$

где $\boldsymbol{u}_0$ и $\boldsymbol{v}_0$ — оптимальные законы управления. Для функционала (5.58)

$$H(\boldsymbol{x}, \psi, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \psi^T[A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_u \boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}_v \boldsymbol{v} + \xi] - \\ - \psi_{n+2}^v \boldsymbol{v}^T Q_v \boldsymbol{v} - \psi_{n+2}^u \boldsymbol{u}^T Q_u \boldsymbol{u} + \psi_{n+1}. \tag{5.60}$$

Вектор-функция $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi}{dt} = -A^T \psi(t), \quad \psi(t_в) = -2\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t_в). \tag{5.61}$$

Отсюда

$$\psi(t) = -2\boldsymbol{k}^T(t_{\text{в}},\ t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t_{\text{в}}). \qquad (5.62)$$

Отметим, что из выражения (5.60) функция H представляется в виде

$$H(\boldsymbol{x},\ \psi,\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = H_1(\psi,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}) + H_2(\psi,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v}) + H_3(\psi,\ \boldsymbol{x}). \qquad (5.63)$$

Функции переменных $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, H_1 и H_2 могут быть приведены к квадратичным формам. В результате получим

$$H_1(\psi,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}) = -\psi^u_{n+2}\left[\boldsymbol{u}^T + \frac{1}{\psi^u_{n+2}}\boldsymbol{x}^T(t_{\text{в}})\boldsymbol{P}\boldsymbol{k}(t_{\text{в}},\ t)\boldsymbol{B}_u\varrho_u^{-1}\right] \times$$

$$\times\,\varrho_u\left[\boldsymbol{u} + \frac{1}{\psi^u_{n+2}}\varrho_u^{-1}\boldsymbol{B}_u^T\boldsymbol{k}^T(t_{\text{в}},\ t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t_{\text{в}})\right]; \qquad (5.64)$$

$$H_2(\psi,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v}) = -\psi^v_{n+2}\left[\boldsymbol{v}^T + \frac{1}{\psi^v_{n+2}}\boldsymbol{x}^T(t_{\text{в}})\boldsymbol{P}\boldsymbol{k}(t_{\text{в}},\ t)\times\right.$$

$$\left.\times\,\boldsymbol{B}_v\varrho_v^{-1}\right]\varrho_v\left[\boldsymbol{v} + \frac{1}{\psi^v_{n+2}}\varrho_v^{-1}\boldsymbol{B}_v^T\boldsymbol{k}^T(t_{\text{в}},\ t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t_{\text{в}})\right], \qquad (5.65)$$

$$H_3(\psi,\ x) = \psi^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \frac{1}{4\psi^u_{n+2}}\psi^T\boldsymbol{B}_u\varrho_u^{-1}\boldsymbol{B}_u^T\psi +$$

$$+\frac{1}{4\psi^v_{n+2}}\psi^T\boldsymbol{B}_v\varrho_v^{-1}\boldsymbol{B}_v^T\psi. \qquad (5.66)$$

При получении формул (5.64) и (5.65) было использовано выражение (5.62). Предполагалось, что ϱ_u и ϱ_v — положительно-определенные матрицы, а $\boldsymbol{P}$ — симметричная положительная матрица.

Из выражений (5.63)—(5.66) следует, что управления обеспечивают экстремумы H, как функции $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ независимо.

Согласно (5.59б) минимум MH, как функции $\boldsymbol{v}$, достигается внутри области определения $\boldsymbol{v}$ при $\psi^v_{n+2} < 0$ для

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{1}{|\psi^v_{n+2}|}\varrho_v^{-1}\boldsymbol{B}_v^T\boldsymbol{k}(t_{\text{в}},\ t)\boldsymbol{P}(t_{\text{в}})M[\boldsymbol{x}(t_{\text{в}})\,|\,\boldsymbol{z}^t_{v0}]. \qquad (5.67)$$

Заметим, что, как и ранее, $\boldsymbol{v}(t)$ предполагается оператором от $\boldsymbol{z}^t_{v0}$ и в выражении (5.59б) является неслучайной функцией, поскольку $\boldsymbol{z}^t_{v0}$ задано.

Аналогично из выражения (5.59а) максимум MH, как функции $\boldsymbol{u}$, достигается внутри области определения при $\psi_{n+2}^{u}>0$ и имеет место при

$$\boldsymbol{u}(t)=-\frac{1}{\psi_{n+2}^{u}}\varrho_{u}^{-1}B_{u}^{T}\boldsymbol{k}^{T}(t_{\text{в}},\ t)\boldsymbol{P}(t_{\text{в}})M[\boldsymbol{x}(t_{\text{в}})\,|\,\boldsymbol{z}_{u0}^{t}]. \qquad (5.68)$$

Обозначим (для сокращения записи)

$$\boldsymbol{V}(t)=\frac{1}{\psi_{n+2}^{v}}\varrho_{v}^{-1}\boldsymbol{B}_{v}^{T}\boldsymbol{k}^{T}(t_{\text{в}},\ t)\boldsymbol{P}; \qquad (5.69)$$

$$\boldsymbol{U}(t)=-\frac{1}{\psi_{n+2}^{u}}\varrho_{u}^{-1}B_{u}^{T}\boldsymbol{k}^{T}(t_{\text{в}},\ t)\boldsymbol{P}. \qquad (5.70)$$

Тогда

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{V}(t)M[\boldsymbol{x}(t_{\text{в}})\,|\,\boldsymbol{z}_{v0}^{t}]; \qquad (5.71)$$

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{U}(t)M[\boldsymbol{x}(t_{\text{в}})\,|\,\boldsymbol{z}_{u0}^{t}]. \qquad (5.72)$$

Рассмотрим сначала случай, когда наводящийся объект и цель используют для управления один и тот же вектор измерений, т. е.

$$\boldsymbol{z}_{u}(t)=\boldsymbol{z}_{v}(t)=\boldsymbol{z}(t) \qquad (5.73)$$

для всех t.

Предположим, что существуют обратные матрицы $\boldsymbol{U}^{-1}$ и $\boldsymbol{V}^{-1}$. Тогда, сравнивая управления (5.67) и (5.68), находим

$$\boldsymbol{U}^{-1}(t)\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{V}^{-1}(t)\boldsymbol{v}(t) \qquad (5.74)$$

или

$$\boldsymbol{u}(t)=-\frac{|\psi_{n+2}^{v}|}{\psi_{n+2}^{u}}\varrho_{u}^{-1}\boldsymbol{B}_{u}^{T}\boldsymbol{B}_{v}^{T-1}\varrho_{v}\boldsymbol{v}(t). \qquad (5.75)$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче несимметрия управлений определяется условиями (5.56) и (5.57), а также различием связи фазовых координат объекта с управлениями.

Определим оптимальные управления в рассматриваемой задаче.

Применяя к уравнениям (5.67) и (5.68) операторы условных математических ожиданий, получим

$$M[\boldsymbol{u}(t)\,|\,\boldsymbol{z}_{0}^{\tau}]=\boldsymbol{U}(t)\boldsymbol{U}^{-1}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau); \qquad (5.76)$$

$$M[\boldsymbol{v}(t)\,|\,\boldsymbol{z}_{0}^{\tau}]=\boldsymbol{V}(t)\boldsymbol{V}^{-1}(\tau)\boldsymbol{v}(\tau), \quad t\geqslant\tau. \qquad (5.77)$$

Свойства оптимальных управлений противников, описанные формулами (5.74) — (5.77), позволяют решить уравнения (5.67) и (5.68).

Согласно уравнению (5.51)

$$\boldsymbol{x}(t_{\text{в}})=\boldsymbol{k}(t_{\text{в}},\ t)\,\boldsymbol{x}(t)+\int_t^{t_{\text{в}}}\boldsymbol{k}(t_{\text{в}},\ \tau)[\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{v}+\xi]\,d\tau. \qquad (5.78)$$

Отсюда

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{V}(t)\Bigg\{\boldsymbol{k}(t_{\text{в}},\ t)\,M_t\boldsymbol{x}(t)+\Bigg[\int_t^{t_{\text{в}}}\boldsymbol{k}(t_{\text{в}},\ \tau)\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{V}(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_t^{t_{\text{в}}}\boldsymbol{k}(t_{\text{в}},\ \tau)\,\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{U}(\tau)\,d\tau\Bigg]\boldsymbol{V}^{-1}(t)\,\boldsymbol{v}(t)\Bigg\}. \qquad (5.79)$$

Здесь учтено, что при $\boldsymbol{z}^t_{u0}=\boldsymbol{z}^t_{v0}$

$$M_t[\boldsymbol{u}(\tau)]=\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{V}^{-1}(t)\,\boldsymbol{v}(t). \qquad (5.80)$$

$$\tau\geqslant t.$$

Если существует матрица $\boldsymbol{g}_v^{-1}(t,\ t_{\text{в}})$, обратная матрице

$$\boldsymbol{g}_v(t,\ t_{\text{в}})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{V}(t)\int_t^{t_{\text{в}}}\boldsymbol{k}(t_{\text{в}},\ \tau)[\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{V}(\tau)+$$

$$+\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{U}(\tau)]\,d\tau\boldsymbol{V}^{-1}(t), \qquad (5.81)$$

то

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{g}_v^{-1}(t,\ t_{\text{в}})\boldsymbol{V}(t)\,\boldsymbol{k}(t_{\text{в}},\ t)\,M[\boldsymbol{x}(t)\,|\,\boldsymbol{z}^t_0]. \qquad (5.82)$$

Аналогично

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{g}_u^{-1}(t,\ t_{\text{в}})\boldsymbol{U}(t)\,\boldsymbol{k}(t_{\text{в}},\ t)\,M[\boldsymbol{x}(t)\,|\,\boldsymbol{z}^t_0], \qquad (5.83)$$

где

$$\boldsymbol{g}_u(t,\ t_{\text{в}})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{U}(t)\int_t^{t_{\text{в}}}\boldsymbol{k}(t_{\text{в}},\ \tau)[\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{V}(\tau)+$$

$$+\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{U}(\tau)]\,d\tau\boldsymbol{U}^{-1}(t). \qquad (5.84)$$

Условное математическое ожидание текущих координат объекта $M_t[\boldsymbol{x}(t)]=\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ определяется в рассматриваемом случае аналогично 3.2:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{x}}}{dt}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{v}+\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1}[\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)]. \qquad (5.85)$$

В этом уравнении для управления (5.82)

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{U}(t)\boldsymbol{V}^{-1}(t)\boldsymbol{v}(t), \qquad (5.86)$$

а для управления (5.83) согласно равенству (5.74)

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{V}(t)\boldsymbol{U}^{-1}(t)\boldsymbol{u}(t). \qquad (5.87)$$

Физический смысл полученного решения состоит в том, что цель создает в системе наведения обратную связь, противоположную по знаку обратной связи наводящегося объекта. Коэффициент этой связи определяется энергетическими возможностями цели, обусловливаемыми ограничением (5.57).

Если задача симметрична, т. е.

$$\boldsymbol{B}_u=\boldsymbol{B}_v, \quad \varrho_u=\varrho_v, \quad C_u=C_v, \quad \boldsymbol{v}=-\boldsymbol{u} \qquad (5.88)$$

управление наводящегося объекта полностью скомпенсировано. Цена игры в этом случае определяется математическим ожиданием и дисперсией выходных координат неуправляемого объекта

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\xi, \quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0. \qquad (5.89)$$

Тогда

$$M[\boldsymbol{x}^T(t_в)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t_в)]=\widehat{SP}[\boldsymbol{P}(t_в)\boldsymbol{D}_x(t_в)], \qquad (5.90)$$

где SP — означает след матрицы, заключенной в скобки. $\boldsymbol{D}_x(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\boldsymbol{D}_x(t)}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_x(t)+\boldsymbol{D}_x(t)\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{S}(t), \qquad (5.91)$$

где

$$R_\xi(t_1, t_2)=\boldsymbol{S}(t_1)\delta(t_1-t_2). \qquad (5.92)$$

Уравнение (5.91) решается при начальном условии, которое определяется априорной дисперсией начальных значений координат

$$D_x(t_0)=M[\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^T]. \qquad (5.93)$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда $\boldsymbol{z}_u(t)$ не совпадает, $\boldsymbol{z}_v(t)$.

В этом случае аналогично выражениям (5.76) и (5.77)

$$M_{ut}[\boldsymbol{u}(\tau)] = \boldsymbol{U}(\tau)\,\boldsymbol{U}^{-1}(t)\,\boldsymbol{u}(t); \tag{5.94}$$

$$M_{vt}[\boldsymbol{v}(\tau)] = \boldsymbol{V}(\tau)\,\boldsymbol{V}^{-1}(t)\,\boldsymbol{v}(t), \tag{5.95}$$

где M_{ut} и M_{vt} — условные математические ожидания при заданных реализациях $\boldsymbol{z}_{ut_0}^{t}$ и $\boldsymbol{z}_{vt_0}^{t}$ соответственно.

Для установления соотношений между управлениями $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, аналогичных условию (5.74), предположим, что множество измерений $\boldsymbol{z}_{ut_0}^{t}$ содержит множество $\boldsymbol{z}_{vt_0}^{t}$. Тогда

$$M_{vt}[M_{u\tau}\boldsymbol{x}(t_{\text{в}})] = M_{vt}\boldsymbol{x}(t_{\text{в}}), \quad t \leqslant \tau. \tag{5.96}$$

Отсюда следует

$$M_{vt}\boldsymbol{u}(\tau) = \boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{V}^{-1}(t)\,\boldsymbol{v}(t). \tag{5.97}$$

Подставляя далее выражение (5.78) в (5.71) с учетом равенства (5.95) и (5.97), получим

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{V}(t)\Big\{\boldsymbol{k}(t_{\text{в}}, t)\,M_{vt}\boldsymbol{x}(t) + \int_{t}^{t_{\text{в}}} \boldsymbol{k}(t_{\text{в}}, \tau)[\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{U}(\tau) + \boldsymbol{B}_v\boldsymbol{V}(\tau)]\,d\tau\,\boldsymbol{V}^{-1}(t)\,\boldsymbol{v}(t)\Big\}. \tag{5.98}$$

Это уравнение аналогично (5.79) и

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{g}_v^{-1}(t, t_{\text{в}})\,\boldsymbol{V}(t)\,\boldsymbol{k}(t_{\text{в}}, t)\,M_{vt}\boldsymbol{x}(t), \tag{5.99}$$

где $\boldsymbol{g}_v(t, t_{\text{в}})$ определяется формулой (5.81). С другой стороны, подставляя выражение (5.78) в (5.72) и учитывая равенство (5.94), получим

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{U}(t)\Big\{\boldsymbol{k}(t_{\text{в}}, t)\,M_{ut}\boldsymbol{x}(t) + \int_{t}^{t_{\text{в}}} \boldsymbol{k}(t_{\text{в}}, \tau) \times [\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{U}(\tau)\,\boldsymbol{U}^{-1}(t)\,\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{B}_v M_{ut}\boldsymbol{v}(\tau)]\,d\tau. \tag{5.100}$$

Предположим для упрощения задачи, что дополнительная информация наводящегося объекта, содержащаяся в $\boldsymbol{z}_{ut_0}^{t}$, не позволяет осуществить более точный прогноз управления цели, чем это может осуществить сама цель на основе информации $\boldsymbol{z}_{vt_0}^{t}$, т. е.

$$M[\boldsymbol{v}(\tau) \mid \boldsymbol{z}_{ut_0}^{t}] = M[\boldsymbol{v}(\tau) \mid \boldsymbol{z}_{vt_0}^{t}], \quad \tau \geqslant t. \tag{5.101}$$

Тогда согласно (5.95) при $t \leqslant \tau$

$$M_{ut}[\boldsymbol{v}(\tau)] = M_{vt}[\boldsymbol{v}(\tau)] = V(\tau)V^{-1}(t)\boldsymbol{v}(t). \quad (5.102)$$

Решая (5.100), получим

$$\boldsymbol{u}(t) = g_{1u}^{-1}(t, t_{\text{в}})U(t)[\boldsymbol{k}(t_{\text{в}}, t)M_{ut}\boldsymbol{x}(t) + \int_t^{t_{\text{в}}} \boldsymbol{k}(t_{\text{в}}, \tau)B_vV(\tau)d\tau V^{-1}(t)\boldsymbol{v}(t)], \quad (5.103)$$

где

$$g_{1u}(t, t_{\text{в}}) = E - U(t)\int_t^{t_{\text{в}}} \boldsymbol{k}(t_{\text{в}}, \tau)B_uU(\tau)d\tau U^{-1}(t). \quad (5.104)$$

Отметим, что в данном случае наводящийся объект, наряду с задачей минимизации ошибки наведения, на основе имеющейся у него информации компенсирует действия цели (второе слагаемое в выражении (5.103)), создающей аналогично предыдущему случаю положительную обратную связь в контуре наведения с помощью управления (5.99).

Можно показать, используя приемы, аналогичные получению оценки $\hat{\boldsymbol{x}}$ (см. 3.2).

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{x}}_v(t)}{dt} = A\hat{\boldsymbol{x}}_v(t) + [B_v + B_vUV^{-1}]\boldsymbol{v}(t) + R_{vt}C_v^TN_v^{-1}[\boldsymbol{z}_{vt} - C_v\hat{\boldsymbol{x}}_v], \quad \hat{x}_v(t_0) = Mx_0. \quad (5.105)$$

Здесь $\boldsymbol{z}_{vt}$ определяется выражением (5.53),

$$\hat{\boldsymbol{x}}_v(t) = M_{vt}\boldsymbol{x}(t). \quad (5.106)$$

Аналогично

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{x}}_u(t)}{dt} = A\hat{\boldsymbol{x}}_u(t) + B_u\boldsymbol{u}(t) + B_v\boldsymbol{v}(t) + R_{ut}C_u^TN_u^{-1}[\boldsymbol{z}_{ut} - C_u\hat{\boldsymbol{x}}_u(t)] \quad (5.107)$$

при обозначениях, соответствующих (5.53) и (5.106).

Таким образом, наводящийся объект в рассматриваемом случае управляется так же, как при известных априори статистических характеристиках движения цели и

полностью известном управлении цели в прошлом. Это естественно, поскольку вектор измерений цели является составной частью вектора измерений наводящегося объекта.

Случай, когда множество $z_{vt_0}^t$ включает в себя множество $z_{ut_0}^t$ при выполнении условия (5.101), может быть рассмотрен аналогично. Очевидно, в этом случае цель осуществляет процесс противодействия на основе известного точно прошлого поведения наводящегося объекта. При этом оптимальным поведением цели является обеспечение максимума (5.52) при измеряемом воздействии $u(t)$ с известными статистическими характеристиками.

В заключение рассмотрим вариант игровой задачи когда множества $z_{ut_0}^t$ и $z_{vt_0}^t$ не пересекаются. При этом условные законы распределения

$$\left.\begin{aligned} p\left(z_{ut_0}^{\tau}/z_{vt_0}^{t}\right) &= p\left(z_{ut_0}^{\tau}\right) \\ p\left(z_{vt_0}^{\tau}/z_{ut_0}^{t}\right) &= p\left(z_{vt_0}^{\tau}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (5.108)$$

сводятся к безусловным законам.

В этом случае оптимальные управления определяются уравнениями (5.71) и (5.72).

На основании условий (5.108) имеем

$$\left.\begin{aligned} M_{ut}\left\{M_{v\tau}\left[x\left(t_{\text{в}}\right)\right]\right\} &= Mx\left(t_{\text{в}}\right), \\ M_{vt}\left\{M_{u\tau}\left[x\left(t_{\text{в}}\right)\right]\right\} &= Mx\left(t_{\text{в}}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (5.109)$$

где M — знак априорного математического ожидания, t и τ принадлежат интервалу управления $(t_0, t_{\text{в}})$.

Предположим, что

$$M\left[x\left(t_{\text{в}}\right)\right] = 0, \qquad (5.110)$$

поскольку обычно в уравнении (5.51)

$$M\left[x\left(t_0\right)\right] = 0. \qquad (5.111)$$

Предположения (5.108) по существу исключают возможность определения действий противника по наблюдаемым процессам z_{ut} и z_{vt}.

Действительно, на основании условий (5.109) и (5.110)

$$M_{ut}\left[v\left(\tau\right)\right] = M_{vt}'\left[u\left(\tau\right)\right] = 0. \qquad (5.112)$$

Очевидно, свойства (5.94) и (5.95) оптимальных управлений сохраняются.

Подставляя (5.78) в (5.71), получаем в рассматриваемом случае

$$\boldsymbol{v}(t)=V(t)\left[\boldsymbol{k}(t_{\text{в}}, t)M_{vt}\boldsymbol{x}(t)+\int_{t}^{t_{\text{в}}}\boldsymbol{k}(t_{\text{в}}, \tau)B_{v}V(\tau)d\tau\times\right.$$
$$\left.\times V^{-1}(t)\boldsymbol{v}(t)\right]. \qquad (5.113)$$

Отсюда

$$\boldsymbol{v}(t)=g_{v1}^{-1}(t_{\text{в}}, t)V(t)\boldsymbol{k}(t_{\text{в}}, t)M_{vt}\boldsymbol{x}(t), \qquad (5.114)$$

где

$$g_{v1}(t_{\text{в}}, t)=E-V(t)\int_{t}^{t_{\text{в}}}\boldsymbol{k}(t_{\text{в}}, \tau)P_{v}V(\tau)d\tau V^{-1}(t). \qquad (5.115)$$

Аналогично оптимальное управление наводящимся объектом $\boldsymbol{u}(t)$ определяется выражением

$$\boldsymbol{u}(t)=g_{u1}^{-1}(t_{\text{в}}, t)U(t)\boldsymbol{k}(t_{\text{в}}, t)M_{ut}\boldsymbol{x}(t). \qquad (5.116)$$

Матрица $g_{u1}(t_{\text{в}}, t)$ определяется из условия (5.104).

В рассматриваемом варианте оптимальные управления игроков совпадают с управлениями при статистически заданном поведении противников. Этот результат — следствие того, что измерения не дают информации об управлениях противников как таковых, а только о результатах их влияния на координаты объекта управления.

5.3. УЧЕТ ИСКАЖЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧАХ НАВЕДЕНИЯ

Как показано в третьей главе, оптимальное управление является безынерционной функцией текущей оценки фазовых координат объекта $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$, на основе измеренных значений вектора $\boldsymbol{z}$.

Когда наблюдаемый вектор $\boldsymbol{z}$ определяется выражением

$$\boldsymbol{z}(t)=C\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{n}(t), \qquad (5.117)$$

где C — прямоугольная матрица $(l\times n)$, являющаяся известной функцией времени; $\boldsymbol{n}(t)$ — вектор белых шумов с уровнем $N(t)$; $\boldsymbol{x}(t)$ — вектор фазовых координат линей-

ного объекта, оценки фазовых координат определяются уравнениями:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{x}}}{dt}=A\hat{\boldsymbol{x}}(t)+B\boldsymbol{u}+R(t)C^TN^{-1}[\boldsymbol{z}(t)-C\hat{\boldsymbol{x}}(t)], \quad (5.118)$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t_0)=M\boldsymbol{x}_0;$$

$$\frac{dR}{dt}=AR+RA^T-RC^TN^{-1}CR+S(t), \quad (5.119)$$

$$R(t_0)=D_{x_0}.$$

В системах телеуправления информация о текущих значениях вектора $\boldsymbol{x}(t)$ может искажаться целью, создающей помехи. В связи с этим изменяется и зависимость текущей оценки $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ от вектора $\boldsymbol{z}(t)$. Задача учета искажений информации при приеме сводится к получению выражений, связывающих $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ с $\boldsymbol{z}(t)$ в случаях, когда связь $\boldsymbol{z}(t)$ с $\boldsymbol{x}(t)$ отличается от условия (5.117).

Предположим в общем случае, что наблюдаемый вектор $\boldsymbol{z}(t)$ определяется выражением

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{n}(t), \quad (5.120)$$

где вектор $\boldsymbol{y}(t)$ случайно связан с вектором фазовых координат $\boldsymbol{x}(t)$ объекта управления. Пусть известен условный закон распределения $\boldsymbol{y}(t)$ при заданном $\boldsymbol{x}(t)$, $P(y/x)$, который не зависит от прошлой информации $\boldsymbol{z}(\tau), \tau\leqslant t$ и имеет конечные первый и второй моменты. В этом случае по формуле условных вероятностей имеем

$$P(\boldsymbol{z}_i/\boldsymbol{x}_i)=\int_{\Omega_y} P(\boldsymbol{z}_i/\boldsymbol{y}_i)P(\boldsymbol{y}_i/\boldsymbol{x}_i)\,d\boldsymbol{y}_i. \quad (5.121)$$

Если $\boldsymbol{n}(t)$ подчиняется нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием, то для момента t_i имеем

$$P(\boldsymbol{z}_i/\boldsymbol{y}_i)=K_{n_i}\exp-\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{z}_i-\boldsymbol{y}_i)^TN_{\eta_i}^{-1}(\boldsymbol{z}_i-\boldsymbol{y}_i)\}. \quad (5.122)$$

Разложим выражение (5.122) в ряд по $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ и подставим его в равенство (5.121). При конечных первом и втором моментах

$$\int\limits_{\Omega_y} y_i P(y_i/x_i)\, dy_i = \mu_1(x_i); \tag{5.123}$$

$$\int\limits_{\Omega_y} y_i y_i^T P(y_i/x_i)\, dy_i = \mu_2(x_i) \tag{5.124}$$

выражение (5.121) может быть представлено в виде

$$P(\boldsymbol{z}_i/\boldsymbol{x}_i) = K_{n_i}\Big[1 - \frac{\Delta t}{2}\int\limits_{\Omega_{y_i}} (\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{y}_i)^T N^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}_i) \times$$

$$\times P(\boldsymbol{y}_i/\boldsymbol{x}_i)\, d\boldsymbol{y}_i\Big] + 0(\Delta t), \tag{5.125}$$

где $0(\Delta t)$ означает члены более высокого по сравнению с Δt порядка малости.

Получим для этого случая уравнение, определяющее апостериорный закон распределения фазовых координат объекта $x(t_i)$ при наблюдении вектора $\boldsymbol{z}$ на интервале (t_0, t_i), где i принимает целые значения.

Обозначая через

$$P_i(\boldsymbol{x}_i) = P(\boldsymbol{x}_i/\boldsymbol{z}_0^i) \tag{5.126}$$

апостериорный закон распределения $\boldsymbol{x}(t_i)$ при наблюдениях $\boldsymbol{z}$ на интервале (t_0, t_i) и через

$$P_{i-1}(\boldsymbol{x}_{i-1}) = P(\boldsymbol{x}_{i-1}/\boldsymbol{z}_0^{i-1}) \tag{5.127}$$

этот закон распределения на предыдущем шаге. По формуле Байеса получим

$$P_i(\boldsymbol{x}_i) = k_i P(\boldsymbol{z}_i/\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{z}_0^{i-1}) \int\limits_{\Omega(x_{i-1})} P(\boldsymbol{x}_i/\boldsymbol{x}_{i-1},\ \boldsymbol{z}_0^{i-1}) \times$$

$$\times P_{i-1}(\boldsymbol{x}_{i-1})\, d\boldsymbol{x}_{i-1}, \tag{5.128}$$

где k_i — коэффициент нормировки;

$\Omega(x_{i-1})$ — область возможных значений вектора $\boldsymbol{x}(t_{i-1})$.

На основании предположения о независимости условного знакона $\boldsymbol{y}_i$ от прошлых наблюдений и некоррелированности значений шума $\boldsymbol{n}(t_i)$ в разные моменты времени, получаем

$$P(\boldsymbol{z}_i/\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{z}_0^{i-1}) = P(\boldsymbol{z}_i/\boldsymbol{x}_i). \tag{5.129}$$

Рассмотрим случай линейного объекта управления

$$x = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0. \qquad (5.130)$$

Для дискретного случая при малых $\Delta t = t_{i-1} - t_i$, можно записать

$$x_i = x_{i-1} + Ax_i\Delta t + Bu_{i-1}\Delta t. \qquad (5.131)$$

Поэтому условный закон распределения

$$P(x_i/x_{i-1},\ z_0^{i-1}) = \delta(x_{i-1} - (E - A\Delta t)\,x_i + Bu_{i-1}\Delta t), \qquad (5.132)$$

где δ — дельта-функция Дирака;

E — единичная матрица. Подставляя выражения (5.129) и (5.132) в формулу (5.128), получим

$$P_i(x_i) = k_i P(z_i/x_i)\,P_{i-1}([E - A\Delta t]\,x_i - Bu_{i-1}\Delta t). \qquad (5.133)$$

Для получения дифференциального уравнения предположим P_{i-1} дифференцируемой функцией аргумента, имеющей непрерывные производные до второго порядка, и разложим ее в ряд Тейлора, ограничившись величинами порядка Δt. Получим

$$P_{i-1}([E - A\Delta t]\,x_i - Bu_{i-1}\Delta t) = P_{i-1}(x_i) - \\ - \frac{\partial P_{i-1}(x_i)}{\partial x_i}(Ax_i + Bu_{i-1}). \qquad (5.134)$$

Здесь $\frac{\partial P_{i-1}}{\partial x_i}$ вектор-строка $(1\times n)$ с элементами $\frac{\partial P_{i-1}}{\partial x_j(t_i)}$, $j = 1, 2, \ldots n$.

Подставляя теперь выражения (5.134) и (5.125) в (5.128), переходя к пределу при $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, стремящемся к нулю, и отбрасывая бесконечно малые величины порядка Δt, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial P(x,t)}{\partial x}(Ax + Bu) + P(x,\ t)\cdot F(x,\ t) = 0, \qquad (5.135)$$

где $\frac{\partial P}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P\left[x(t_i)/z_{t_0}^{t_i}\right] - P\left[x(t_i)/z_{t_0}^{t_{i-1}}\right]}{\Delta t}$;

$$P(x,\ t) = P[x(t)/z_{t_0}^{t}]; \qquad (5.136)$$

$$F(x,t) = Sp\,A + \frac{1}{2}\,Sp\left\{N^{-1}\left[\mu_2(x) - \int\limits_{\Omega_x}\mu_2(x)\,P(x,\ t)\,dx\right]\right\} - \\ - z^T N^{-1}\left[\mu_1(x) - \int\limits_{\Omega_x}\mu_1(x)\,P(x,\ t)\,dx\right]; \qquad (5.136)$$

Sp — след матрицы, μ_1 и μ_2 определяются выражениями (5.123) и (5.124); N — уровень белого шума $\boldsymbol{n}(t)$.

В качестве начального условия в уравнении (5.135) используется априорный закон распределения фазовых координат $\boldsymbol{x}$ в момент t_0, равный $P(\boldsymbol{x}_0)$. Уравнение (5.135) может быть решено в общем виде с помощью обычного метода характеристик, применяемого для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Из уравнения (5.130) следует

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{k}^T(t, t_0)\boldsymbol{x}(t)-\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{k}^T(\tau, t_0)B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau, \quad (5.137)$$

где $\boldsymbol{k}^T(t, t_0)$ — импульсная переходная матрица системы сопряженной (5.130). Поэтому

$$P(\boldsymbol{x}, t)=P_0\left[\boldsymbol{k}^T(t, t_0)\boldsymbol{x}(t)-\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{k}^T(\tau, t_0)B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau, t_0\right]\times$$

$$\times\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}F_1[\boldsymbol{k}^T(t, \tau)\boldsymbol{x}(t)- \quad (5.138)\right.$$

$$\left.-\int_{\tau}^{t}\boldsymbol{k}^T(\mu, \tau)B\boldsymbol{u}(\mu)d\mu, \tau]dt\right\},$$

где P_0 — априорный закон распределения $\boldsymbol{x}_0$ в момент t_0. Подынтегральное выражение в показателе экспоненциальной функции является результатом замены в формуле (5. 136) функции $\boldsymbol{x}(\tau)$ в μ_1 и μ_2 их выражениями при $t_0=\tau$. Поскольку в выражение (5.136) входят средние значения искомого распределения, окончательное решение может быть получено после определения

$$M_1=\int_{\Omega_x}\mu_1(\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x}, \quad (5.139)$$

$$M_2=\int_{\Omega_x}\mu_2(\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x} \quad (5.140)$$

и решения алгебраической системы уравнений относительно M_1 и M_2. Зная $P(\hat{x}, t)$, апостериорное математи-

ческое ожидание фазовой координаты объекта $x(t)$ можно определить из выражения

$$\hat{x}(t)=\int_{X_x} xP(x,\ t)\,dx. \qquad (5.141)$$

Полученные выражения дают принципиальную возможность решения задачи оптимального управления при действии мультипликативных помех, однако фактическое получение решения сопряжено с вычислительными трудностями.

Рассмотрим возможность применения уравнения (5.135) к задачам управления при действии помех.

Предположим, что цель имеет возможность создавать помехи, исключающие прием полезного сигнала $x(t)$ наводящимся объектом на некоторых интервалах внутри $(t_0,\ t_в)$. Такое положение имеет место, когда происходит прекращение поступления информации о положении цели вследствие действия помех [22].

Если принять, что срывы сопровождения происходят в известные моменты времени, то решение может быть получено приравниванием к нулю элементов матрицы C в (5.118) и (5.119) на интервалах прекращения сопровождения. В частности, если

$$C(t)=0 \qquad t_1\leqslant t\leqslant t_2, \qquad (5.142)$$

то из выражений (5.118) и (5.119) следует, что на этом интервале

$$\frac{d\hat{x}}{dt}=A\hat{x}_1(t)+Bu \qquad (5.143)$$

$$\frac{dR}{dt}=AR+RA^T+S(t) \qquad (5.144)$$

при заданных $\hat{x}(t_1)$ и $R(t_1)$.

Уравнения (5.143) и (5.144) соответствуют априорным оценкам вектора $x(t)$ при отсутствии наблюдений. Таким образом, если матрица $C(t)=0$, то обработка информации в системе наведения эквивалентна прекращению приема вектора z и переходу к априорным оценкам фазовых координат объекта. При этом в качестве начальных значений принимают оценки, имевшие место в последний момент получения информации.

Заметим, что подобный результат имеет место также в случае, когда уровень белого шума $\boldsymbol{n}(t)$, равный N, неограниченно возрастает.

Фактически в системе наведения осуществляется при этом пролонгация координат цели на основе априорной гипотезы о ее движении.

Другим предельным случаем является представление элементов матрицы $\boldsymbol{C}$ в виде случайных процессов, значения которых в разные моменты времени независимы и равны 0 с вероятностью q_i и единице с вероятностью $1-q_i$.

В этом случае вектор $\boldsymbol{z}$ может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}\alpha\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}(t),\ \ \boldsymbol{y}(x)=\boldsymbol{C}\alpha\boldsymbol{x}, \tag{5.145}$$

где $\alpha(t)$ диагональная матрица $(n\times n)$ со случайными элементами $\alpha_{jj}(t)$, подчиняющимися закону распределения с плотностью:

$$P_{\alpha_{jj}}(t)=q_j(t)\,\delta[\alpha_{jj}(t)]+[1-q_j(t)]\,\delta[\alpha_{jj}(t)-1], \tag{5.146}$$

где $\delta[\alpha_{jj}]$ — дельта-функция. Если кроме того, считать $\alpha_{jj}(t)$ независимыми для разных j в один и тот же момент, то совместный закон распределения $\alpha(t)$ равен произведению законов распределения каждого элемента и

$$P_\alpha(t)=\prod_{j=1}^{n}P_{\alpha_{jj}}(t). \tag{5.147}$$

Положим для простоты $\alpha(t)$ скалярной функцией, что соответствует одновременному обращению в нуль всех элементов вектора $x(t)$ с вероятностью $q(t)$. В этом случае в уравнении (5.135) функция (5.136) может быть записана в виде

$$F(x,\ t)=SpA+\frac{q-1}{2}[\boldsymbol{x}^TC^TN^{-1}C\boldsymbol{x}-Sp(C^TN^{-1}C\times$$

$$\times D_x(t))]-(1-q)(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}})^TC^TN^{-1}\boldsymbol{z}. \tag{5.148}$$

Сравним равенство (5.148) с выражением функции $F(\boldsymbol{x},\ t)$ при неслучайной матрице $\boldsymbol{C}$, которое имеет место при

$$P_c(\boldsymbol{C})=\delta(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_1) \tag{5.149}$$

и равно из (5.136)

$$F_c(\boldsymbol{x},\ t)=SpA+\frac{1}{2}[\boldsymbol{x}^T C_1^T N^{-1} C_1 \boldsymbol{x}-$$

$$-Sp(C_1^T N^{-1} C_1 P_x(t)]-(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}})^T C_1^T N^{-1}\boldsymbol{z}. \quad (5.150)$$

Отсюда следует, что выражение (5.148) и (5.150) совпадают, если в формуле (5.150) уровень ошибок измерений увеличить в $1/1-q$ раз.

Поскольку математическое ожидание и дисперсионная матрица $\boldsymbol{x}(t)$, соответствующие формуле (5.150), удовлетворяют уравнениям (5.118) и (5.119), оценка текущих фазовых координат $\boldsymbol{x}$ в условиях, когда полезная информация в наблюдаемом векторе $\boldsymbol{z}(t)$ становится равной нулю с вероятностью $q(t)$ независимо от прошлых моментов времени, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{x}}}{dt}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{Bu}(t)+\boldsymbol{R}(t)C^T N^{-1}(1-q)[\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)]. \quad (5.151)$$

При этом

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=\boldsymbol{AR}+\boldsymbol{RA}^T-\boldsymbol{RC}^T N^{-1}(1-q)\boldsymbol{CR}. \quad (5.152)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае оценка $\boldsymbol{x}(t)$ сводится к оценке без потери информации при увеличении уровня N белого шума ошибок измерений в $1/1-q$ раз.

Рассмотрим также случай, когда

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{Cx}(t), \quad (5.153)$$

где $\boldsymbol{C}$ — случайная матрица с известным законом распределения $P_c(c)$, в общем случае зависящим от времени.

В этом случае функции $F(\boldsymbol{x},\ t)$ (5.136) примет вид

$$F=SpA+\frac{1}{2}\Bigg[\boldsymbol{x}^T\int_{\Omega_c} C^T N^{-1} CP_c(\boldsymbol{C})\,d\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{x}-$$

$$-Sp\Bigg(\int_{\Omega_c} C^T N^{-1} CP_c(\boldsymbol{C})\,d\boldsymbol{C}\cdot\mu_{2x}\Bigg)\Bigg]-$$

$$-(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}})^T\int_{\Omega_c} C^T P_c(\boldsymbol{C})\,d\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{z}. \quad (5.154)$$

Здесь

$$\mu_{2x}=\int\limits_{\Omega_x} \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T P(\boldsymbol{x},\ t)\,d\boldsymbol{x}; \tag{5.155}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t)=\int\limits_{\Omega_x} \boldsymbol{x} P(\boldsymbol{x},\ t)\,d\boldsymbol{x}; \tag{5.156}$$

Ω_c, Ω_x — области возможных значений $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{C}$.

Будем искать в этом случае решение (5.135) в виде

$$P(\boldsymbol{x},\ t)=k\exp-\frac{1}{2}[(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}})]. \tag{5.157}$$

Подставляя выражения (5.157) и (5.136) в (5.135) и приравнивая коэффициенты при степенях $\boldsymbol{x}$ нулю, получим

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{x}}}{dt}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{D}\Big[\int\limits_{\Omega_c} \boldsymbol{C}^T P_c(\boldsymbol{C})\,d\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{z}-$$

$$-\int\limits_{\Omega_c} \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{C}P_c(\boldsymbol{C})\,d\boldsymbol{C}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}\Big] \tag{5.158}$$

и

$$\dot{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^T-\boldsymbol{D}\int\limits_{\Omega_c} \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{C}P_c(\boldsymbol{C})\,d\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}. \tag{5.159}$$

Из сравнения этих выражений с формулами (5.118) и (5.119) следует, что если матрица $\boldsymbol{C}$ случайна с известным законом распределения P_c, то оценки текущих координат объекта совпадают с оценками для детерминированной матрицы $\boldsymbol{C}$ при замене $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{C}$ математическими ожиданиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. Александров В. М. Минимаксный подход к решению задачи обработки информации. «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1966, № 5.
3. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., ИЛ, 1960.
4. Боднер В. А. Теория управления полетом. М., «Наука», 1964.
5. Вермишев Ю. Х. Основы управления ракетами. М., Воениздат, 1968.
6. Гельфанд Н. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление, М. Физматгиз, 1961.
7. Гуткин Л. С. и др. Радиоуправление реактивными снарядами и космическими аппаратами. М., «Советское радио», 1968.
8. Drenick R. F. Adaptive Servormechanisms, Applications and Industry., November, 1960.
9. Калман Р. Е. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания. Труды американского общества инженеров-механиков, серия Д, Техническая механика, т. 83, № 1, 1961.
10. Kalman R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans ASME, J. Basic Engineering, March, 1960.
11. Локк А. Управление снарядами. М., ГИТТЛ, 1957.
12. Лоэв М. Теория вероятностей. М., ИЛ, 1962.
13. Ньютон Дж. и др. Теория линейных следящих систем. ИЛ, 1962 г.
14. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полета, устойчивость и управляемость летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1965.
15. Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
16. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение в задачах автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
17. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
18. В. Н. Типугин, В. А. Вейцель. Радиоуправление. М., «Советское радио», 1962.

19. Троицкий В. А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления с ограниченными координатами. «Прикладная математика и механика», 1962, № 3.
20. Томович Р., Карилюс. Быстродействующие аналоговые вычислительные машины. М., «Мир», 1964.
21. Jury E. I. Analysis and synthesis of sampled — data control systems. AIEE Trans — actions, 1954.
22. Сергиевский Б. Д. Методы и средства противодействия противоракетной обороне. «Зарубежная радиоэлектроника», № 1, 1966.
23. Доу Р. Б. Основы теории современных снарядов. М., «Наука», 1964.
24. Гуткин Л. С., Пестряков В. Б., Типугин Р. Н. Радиоуправление. «Советское радио», 1970.
25. Зиханов К. И., Стрелков В. Г. Телеуправление ракет. М. Воениздат, 1966.
26. Латухин А. Н. Боевые управляемые ракеты. М. Воениздат, 1968.
27. Military Affairs. «Interavia Air Letter», 1965, N 5842, p. 3—8.
28. Air Defense Artillery. «Army», 1964, vol. 15, No. 4, November, p. 142.
29. Russ Use Rockets in Weather Control. «Space Age News», 1965, vol. 7, No. 6, p. 4a.
30. Trainor J. Study Aids Case for Nike — X. «Missiles and Rockets», 1965, vol. 16, No. 1, p. 12.
31. Chang S. S. L. Optimun transmission of Continuous Signal Over a Sampled Data Link. «Applications and Industry», January, 1961, p. 52.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Александр Михайлович Батков,
Игорь Борисович Тарханов

СИСТЕМЫ ТЕЛЕУПРАВЛЕНИЯ

Редактор *С. И. Виноградская* — Художник *Е. Н. Алексеев*
Техн. редактор *Т. С. Старых* — Корректор *Е. П. Карнаух*

Т-18414 Сдано в набор 9/IX-1971 г. Подписано в печать 13/XI-1972 г.
Формат 84×108 1/32 Печ. л. 6,0 (Усл. печ. л. 10,08) Уч. изд. л. 9,2
Бум. л. 3,0 Бумага № 2 Тираж 6000 экз. Изд. зак. № 2879
Цена 56 коп. Тем. план 1970 г. № 130

Издательство «Машиностроение», Москва, Б-78, 1-й Басманный пер., 3.

Московская типография № 8 «Союзполиграфпрома»
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
Хохловский пер., 7. Тип. зак. 3663